Introduction à la finance mathématique.
TD 1-2, 03/02/21
Introduction aux produits dérivés, modèles à une période

EXERCICE 1 -[Future sur un actif versant les dividendes] Une obligation OAT de nominal 100 EUR et de taux facial 8% verse son prochain coupon dans 3 mois. Calculer le prix à terme de cette obligation d'échéance 6 mois si son prix aujourd'hui est de 106 EUR et le taux d'intérêt est 5% annuel.

EXERCICE 2 -**Parité Put-Call.**
On considère un actif risqué dont le prix à l'instant t est S_t. On suppose que le taux d'intérêt r est positif. On note $c(t, S_t, T, K)$ (respectivement $p(t, S_t, T, K)$) le prix d'un *call* européen (respectivement d'un *put* européen) de prix d'exercice K, de maturité T et dont l'actif sous-jacent est S.

1. Montrez la relation parité de Call-Put pour les options européennes :
$$c(0, S_0, T, K) - p(0, S_0, T, K) = S_0 - Ke^{-rT}.$$
2. Déduisez-en que le prix du *call* satisfait l'encadrement :
$$(S_0 - Ke^{-rT})^+ \leq c(0, S_0, T, K) \leq S_0.$$
Montrez directement (sans utiliser 1.) l'inégalité $S_0 - Ke^{-rT} \leq c(0, S_0, T, K)$.
3. On suppose que l'actif risqué s'échange à 20 euros, que le prix d'un *call* européen sur cet actif, de prix d'exercice $K = 11$ euros et de maturité $T = 1$ année, est 13 euros. On suppose de plus que $r = 9.531\%$. Calculez le prix d'un *put* européen de mêmes caractéristiques.
4. Montrez que les prix d'aujourd'hui $C_0(T, K) = C(0, S_0, T, K)$ et $P_0(T, K) = P(0, S_0, T, K)$ des options *call* et *put* américains de maturité T et de prix d'exercice K satisfont
$$C_0(T, K) - P_0(T, K) \leq S_0 - Ke^{-rT}$$
5. Dans le modèle de Black Scholes, $S_t = S_0 e^{\sigma W_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t}$, où $(W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien. Sachant que W_t est une variable aléatoire normale centrée de variance t, calculez $\mathbb{E}(e^{-rT}(S_T - K)^+) - \mathbb{E}(e^{-rT}(K - S_T)^+)$. Concluez que l'approche *assurantielle* - qui consiste principalement à calculer le prix comme l'espérance actualisée du *payoff* futur - mène à une contradiction avec la parité Call-Put européenne si $\mu \neq r$.

EXERCICE 3 - En utilisant les mêmes notations que dans l'exercice 1, montrez que

1. Pour toute maturité $T > 0$, le prix des *call* et des *put* sont convexes en le prix d'exercice K.
2. $\forall K > 0$, $\forall 0 \leq T_1 \leq T_2$, $c(0, S_0, T_1, K) \leq c(0, S_0, T_2, Ke^{r(T_2 - T_1)})$.

EXERCICE 4 - **Butterfly options.**

Étant donnés un actif dont le prix à l'instant T est S_T et trois prix d'exercice $K_1 < K_2 < K_3$, un *butterfly* est une combinaison de *trading* qui est le résultat de la position nette suivante : une position longue sur un *call* européen de prix d'exercice K_1, une position longue sur un *call* européen de prix d'exercice K_3, et une position courte sur deux *calls* européens de prix d'exercice K_2.

1. Quel est le *payoff* d'une telle option ? Calculez son prix pour tout $t \geq T$.

2. Si K_2 est le millieu de l'intervalle $[K_1, K_3]$, montrez que le *butterfly* peut être créé en achetant et en vendant des options *put* avec les différents prix d'exercice K_1, K_2 et K_3.

NB : Les options *butterfly* peuvent être prises lorsque l'investisseur pense que l'actif sous-jacent ne va pas beaucoup augmenter ni chuter d'ici la maturité.

EXERCICE 5 -Effets des dividendes sur le prix des options européennes.
Dans cet exercice nous considérons des options dont l'atif sous-jacent verse des dividendes. Soit D la valeur actualisée de l'ensemble des dividendes versés sur l'intervalle $[0, T]$. Montrez les relations :

1. $c_0(T, K) \geq S_0 - D - Ke^{-rT}$,
2. $p_0(T, K) \geq D + Ke^{-rT} - S_0$,
3. (parité Call-Put modifiée) $c_0(T, K) + D + Ke^{-rT} = p_0(T, K) + S_0$.
4. Si l'actif risqué verse un dividende à l'instant t, montrez que le prix du *call* demeure continu en t, même si le prix de l'actif risqué n'est pas continu en t.

EXERCICE 6 - Un actif donné s'échange à 95 euros et les *calls* et *puts* européens sur l'actif donné, de prix d'exercice 100 et de maturité trois mois, s'échangent respectivement à 1.97 euros et à 6.57 euros. Dans un mois, l'actif va verser un dividende de 1 euro. Les prix des obligations zéro-coupon à un mois et à trois mois sont respectivement de 99.60 et de 98.60. Construisez une stratégie d'arbitrage, si cela est possible.

EXERCICE 7 -Options américaines On note par $\text{Call}_t(T, K)$ le prix à la date t d'un call européen de strike K et d'échéance T, et par $\text{Put}_t(T, K)$ celui d'un put. $\text{CallAmer}_t(T, K)$ and $\text{PutAmer}_t(T, K)$ correspondent, respectivement au call et put américains. Nous supposons que l'actif sous-jacent ne verse pas de dividendes.

1. Montrer que pour tout $t \leq T$,
$$\text{CallAmer}_t(T, K) = \text{Call}_t(T, K).$$
2. Montrer que pour tout $t \leq T$,
$$\text{Put}_t(T, K) \leq \text{PutAmer}_t(T, K) \leq \text{Put}_t(T, K) + K(1 - e^{-r(T-t)}).$$

EXERCICE 8 -Un modèle à une période
On considère un marché à une période avec trois états $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ et deux actifs risqués :

— Un actif S de valeur 1.5 au temps $t = 0$, et qui vaut, au temps $t = 1$, i quand l'état correspond à ω_i, pour tout $i = 1, 2, 3$.
— Une option Put, P de sous-jacent S et strike $K = 2$, qui vaut 3/8 au temps $t = 0$.

On suppose que le taux d'intérêt est de $r = 1/3$.

1. Évaluer le gain G ainsi que le gain actualisé G^* dans chaque état pour la stratégie qui consiste en l'achat d'une unité de l'actif risqué et d'une option put. Est-ce une opportunité d'arbitrage ?
2. Pour chaque état ω_i, $i = 1, 2, 3$, calculer le prix correspondant, i.e. prix de l'actif qui paie 1 quand ω_i est réalisé et 0 si non.
3. On rajoute un quatrième état ω_4 où le prix de l'actif vaut 4, les autres paramètres restent inchangés. A-t-on des opportunités d'arbitrage dans ce cas ? Caractériser l'ensemble des probabilités risque-neutre.
4. Est-ce que ce nouveau marché est complet ?
5. Peut-on compléter ce marché avec un Call de strike $K = 2$? avec un Put de strike $K = 4$? avec strike $K = 3$? Quelles sont les bornes de non-arbitrage pour les prix de ces trois actifs ?
6. On suppose que le marché est complété par un Put de strike $K = 3$ et de prix 7/8. Calculer la probabilité risque-neutre dans ce nouveau marché. Calculer le prix d'un Call de strike $K = 3$.