Introduction à la finance mathématique
TD 4, 2/5/2018

Mouvement brownien

Exercice 1 (Martingales)**.** Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien et $\mathcal{F}$ sa flitration naturelle, montrer que les processus suivants sont des $\mathcal{F}-$martingales:

- $(B_t)_{t\geq 0}$;
- $(B_t^2 - t)_{\geq 0}$;
- $\left(e^{\sigma B_t - \frac{\sigma^2 t}{2}}\right)_{t\geq 0}$, avec $\sigma \in \mathbb{R}$, appelé brownien exponentiel.

Exercice 2 (Caractérisation du mouvement brownien)**.** Soit B un processus continu tel que $B_0 = 0$ p.s. et $\mathcal{F}$ sa filtration naturelle. Montrer que B est un mouvement brownien si, et seulement si, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le processus complexe M^λ défini par :

$$M_t^\lambda := e^{i\lambda B_t + \frac{\lambda^2 t}{2}}$$

est une $\mathcal{F}$-martingale.

Exercice 3 (Mouvements browniens)**.** Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien. Montrez que les processus suivants sont également des mouvements browniens :

- $\left(\frac{1}{a} B_{a^2 t}\right)_{t\geq 0}$,
- $(B_{t+t_0} - B_{t_0})_{t\geq 0}$,
- Le processus défini par $tB_{1/t}$ pour $t > 0$ et prolongé par 0 en $t = 0$.

Exercice 4 (Pont brownien)**.** Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien. On définit un nouveau processus $Z = (Z_t)_{0\leq t\leq 1}$ par :

$$Z_t = B_t - tB_1.$$

1. Montrer que Z est un processus indépendant de B_1.
2. Calculer la fonction de moyenne m_t et la fonction de covariance $K(s,t)$ du processus Z.
3. Montrer que le processus défini pour tout $t \in [0,1]$ par $\tilde{Z}_t := Z_{1-t}$ a la même loi que Z.
4. Soit $Y_t := (1-t)B_{\frac{t}{1-t}}$ défini pour $0 \leq t < 1$.
   (a) Montrer que Y_t tend vers 0 presque sûrement lorsque t tend vers 1.
   (b) Montrer que le processus $(Y_t)_{0\leq t\leq 1}$ prolongé par 0 en 1 a la même loi que Z.