1A - Théorie des Probabilités. 2022-2023
Prof. Brunel

Examen final (session principale)

1. Durée de l'examen: 2 heures.
2. Feuille recto-verso A4 manuscrite autorisée. Appareils électroniques interdits.
3. L'examen comprend 30 points. Votre note sera le minimum entre le nombre de points obtenus et 20.
4. L'accent sera mis sur la rigueur et la précision de vos réponses. Les réponses non justifiées ne seront pas prises en compte.
5. Bon courage !

Exercice 1 (20 points)

1. Pour tout $n \geq 1$, soit X_n une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $p_n \in [0,1]$.
   a) Montrer que X_n converge en distribution si et seulement si la suite p_n converge.
   b) Montrer que X_n converge en probabilité vers 0 si et seulement si $p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
2. Soient X et Y deux variables aléatoires de loi de Bernoulli. Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si leur covariance est nulle.
3. Les assertions suivantes sont-elles vraies ? Donner une justification si elles le sont, ou un contre-exemple dans le cas contraire.
   a) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles intégrables, convergeant en distribution vers une variable aléatoire X intégrable. Alors $\mathbb{E}[X_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[X]$.
   b) Si une variable aléatoire réelle admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue, alors sa fonction de répartition est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   c) Toute variable aléatoire réelle admet une densité par rapport à une certaine mesure.
4. Soit X une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur $[0,1]$ et Y une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, indépendante de X.
   a) Déterminer la loi de $X+Y$.
   b) Déterminer la loi de $(2Y-1)X$.
   c) Calculer $\mathbb{E}[XY|X]$.
   d) Calculer $\mathbb{E}[\cos(2\pi(X+Y))|Y]$.
5. Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, où $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 > 0$. Soit $T \in \mathbb{R}$ un nombre réel et $Y = \max(X,T)$. La variable aléatoire Y admet-elle une densité par rapport à la mesure de Lebesgue ?
6. Soient X et Y deux variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$. Montrer que X/Y admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue, et la déterminer.
7. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. de loi de Poisson de paramètre 1.
   a) Calculer la fonction caractéristique de X_1.
   b) Déterminer la fonction caractéristique de $X_1 + \ldots + X_n$ et en déduire sa loi.
   c) Pour tout entier $n \geq 1$, soit Y_n une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre n. Déduire des questions précédentes la limite en distribution de $\frac{Y_n - n}{\sqrt{n}}$, lorsque $n \to \infty$.
8. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, i.i.d., de carré intégrable. Pour tout $n \geq 1$, on pose $V_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$, où $\bar{X}_n$ est la moyenne empirique de $X_1, \ldots, X_n$. Montrer que V_n converge presque sûrement vers $\mathsf{Var}(X_1)$.
9. Soit X une variable aléatoire réelle de loi normale.
   a) Le vecteur aléatoire $(X, -X, 2X)$ est-il un vecteur gaussien ?

b) Ce vecteur aléatoire admet-il une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^3$?

10. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles et $(\rho_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels strictement positifs tendant vers $+\infty$. On suppose que $\rho_n X_n$ converge en distribution. Montrer que nécessairement, $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$.
11. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ (on rappelle que cette loi a pour densité, par rapport à la mesure de Lebesgue, la fonction donnée par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{x\geq 0}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$). A l'aide du théorème de la limite centrale et du théorème de Slutsky, montrer que $\sqrt{n}(1/\bar{X}_n - \lambda)$ converge en distribution vers une loi normale, dont on déterminera les paramètres (*indication : pour tous réels $a, b > 0$, $1/a - 1/b = \frac{b-a}{ab}$*).

Exercice 2 (10 points)

Soit $f(x) = \dfrac{2x}{\theta^2}\mathbb{1}_{0\leq x\leq\theta}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, où $\theta > 0$ est un nombre réel fixé.

1. Vérifier que f est bien une densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

   Dans la suite, soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. admettant f comme densité par rapport à la mesure de Lebesgue.
2. Calculer la limite presque sûre de $\bar{X}_n$, lorsque $n \to \infty$.
3. Déterminer deux réels a et b, qui ne dépendent pas de θ, tels que $\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - a\theta}{b\theta}$ converge en distribution vers la loi normale centrée réduite.
4. Soit $\alpha \in (0, 1)$. Déduire de la question précédente une suite d'intervalles de confiance de niveau asymptotique α pour θ, i.e., une suite d'intervalles $(I_n)_{n\geq 1}$ telle que pour tout $n \geq 1$, I_n ne dépend que de $X_1, \ldots, X_n$ et ne dépend pas de θ, et satisfaisant $P(I_n \ni \theta) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - \alpha$ (pour tout $\beta \in (0, 1)$, on notera q_β le quantile d'ordre β de la loi normale centrée réduite).
5. Pour tout $n \geq 1$, on pose $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.
   a) Vérifier que $M_n \leq \theta$ presque sûrement.
   b) Déterminer la fonction de répartition de $n\frac{\theta - M_n}{\theta}$ (*on rappelle qu'une fonction de répartition est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier)*.
6. En déduire que $n\frac{\theta - M_n}{\theta}$ converge en distribution, vers une loi dont on donnera la fonction de répartition.
7. Soit $\alpha \in (0, 1)$. Déduire de la question précédente une suite d'intervalles de confiance de niveau asymptotique α pour θ.
8. Soit $n \geq 1$. A l'aide du calcul de la fonction de répartition de $n\frac{\theta - M_n}{\theta}$, proposer un intervalle de confiance de niveau **non-asymptotique** α pour θ, i.e., un intervalle

I_n ne dépendant que de $X_1, \dots, X_n$, et non de θ, et satisfaisant l'égalité

$$P(I_n \ni \theta) = 1 - \alpha.$$