1A - Théorie des Probabilités. 2023-2024
Prof. Brunel

Examen final (session principale)

1. Durée de l'examen: 2 heures.
2. Feuille recto-verso A4 manuscrite autorisée. Appareils électroniques interdits.
3. L'examen ne comprend qu'un seul exercice, sur 32 points. Votre note sera le minimum entre le nombre de points obtenus et 20.
4. Il est impératif que les questions soient traitées dans l'ordre, quitte à laisser de l'espace entre chaque question. Les copies ne respectant pas cette règle ne seront pas corrigées (et recevront donc automatiquement la note 0).
5. Rappel : les copies mal présentées et/ou illisibles ne seront pas corrigées (et recevront donc automatiquement la note 0).
6. L'accent sera mis sur la rigueur et la précision de vos réponses. Les réponses non justifiées ne seront pas prises en compte.
7. Bon courage !

Exercice 1 (32 points)

1. (3 pts) Les assertions suivantes sont-elles vraies ? Justifiez votre réponse à l'aide d'une preuve ou d'un contre-exemple.
   a) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et X et Y deux variables aléatoires réelles intégrables définies sur Ω. Alors X et Y sont indépendantes si et seulement si pour toute sous-tribu $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$, $\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]$ et $\mathbb{E}[Y|\mathcal{B}]$ sont indépendantes.
   b) Soit X une variable aléatoire réelle de loi exponentielle de paramètre 1 et Y une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, indépendante de X. Alors $\max(X, Y)$ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue.
   c) Soit X une variable aléatoire réelle de loi exponentielle de paramètre 1 et Y une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, indépendante de X. Alors $X + Y$ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue.
2. (1 pt) Soit (X, Y) un vecteur aléatoire réel gaussien admettant une densité par rapport à la mesure de Lebesgue (sur $\mathbb{R}^2$). Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel a garantissant que le vecteur aléatoire $(X + 2Y, 2X + aY)$ admette une densité par rapport à la mesure de Lebesgue.
3. (2 pts) Soit $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels strictement positifs. Pour tout $n \geq 1$, soit X_n une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ_n. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en distribution si et seulement si la suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ est convergente. Dans ce cas, déterminer les limites de ces deux suites.
4. (1 pt) Soient X et Y deux variables aléatoires i.i.d de loi uniforme sur $[0, 1]$. Montrer que XY admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue, et la déterminer.
5. (2 pts) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d de carré intégrable. Pour tout $n \geq 1$, on note $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ la moyenne empirique de $X_1, \ldots, X_n$. Déterminer un nombre réel a tel que $\sqrt{n}\left((\bar{X}_n)^2 - \mathbb{E}[X_1]^2\right) \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \mathcal{N}(0, a)$.
6. (2 pts) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de vecteurs aléatoires réels i.i.d intégrables. Montrer que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}(-1)^i X_i$ converge en probabilité vers une limite qu'on déterminera.
7. (2 pts) Soient $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires réelles i.i.d de loi uniforme sur $[0, 1]$. Montrer que $n(1 - \max(X_1, \ldots, X_n))$ converge en distribution vers une loi exponentielle.
8. (2 pts) Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz conditionnelle : si X et Y sont deux variables aléatoires réelles de carré intégrable sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $\mathcal{B}$ est une sous-tribu de $\mathcal{A}$, alors $\mathbb{E}[|XY||\mathcal{B}] \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2|\mathcal{B}]\mathbb{E}[Y^2|\mathcal{B}]}$ presque sûrement.
9. (6 pts) Soient X et Y deux variables aléatoires réelles i.i.d de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$.
   a) Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable et positive quelconque. Vérifier que $\mathbb{E}[h(U, V)] = 2\mathbb{E}[h(X, Y)\mathbb{1}_{X\leq Y}]$.

b) En déduire que le couple (U, V) admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue, et la déterminer.

c) Les variables U et V sont-elles indépendantes ?

d) Vérifier que V est intégrable et déterminer $\mathbb{E}[V|X]$.

10. (2 pts) Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ et $(Y_n)_{n\geq 1}$ deux suites de vecteurs aléatoires réels de taille $d \geq 1$. On suppose que pour tout $n \geq 1$, X_n et Y_n sont indépendants, et que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} X$ et $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} Y$, où X et Y sont deux vecteurs aléatoires indépendants. Montrer que $X_n^\top Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} X^\top Y$.

11. (6 pts) Soient $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels strictement positifs et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, telle que pour chaque $n \geq 1$, X_n suit la loi exponentielle de paramètre λ_n. On cherche à déterminer la loi de $Z = \inf_{n\geq 1} X_n$.

    a) Justifier que Z est bien une variable aléatoire et que $Z \geq 0$ presque sûrement.

    b) Pour tout $n \geq 1$, soit $Z_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$. Montrer que $Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s}} Z$.

    c) Déterminer la fonction de répartition de Z_n, pour chaque $n \geq 1$.

    d) En déduire la loi de Z, selon si la série de terme général λ_n est convergente ou divergente.

12. (1 pt) Soient $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires réelles i.i.d de carré intégrable. Pour tout $n \geq 1$, on pose $V_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ la variance empirique de $X_1, \ldots, X_n$. Montrer que V_n converge presque sûrement vers la variance de X_1.

13. (2 pts) Pour tout entier $n \geq 1$, soit X_n une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, n)$. Montrer que X_n ne converge pas en distribution.