1A - Théorie des Probabilités. 2024-2025
Prof. Brunel

Examen final (session principale)

1. Durée de l'examen: 2 heures.
2. Feuille recto-verso A4 manuscrite autorisée. Appareils électroniques interdits.
3. L'examen comprend un total de 33 points. Votre note sera le minimum entre le nombre de points obtenus et 20.
4. Il est impératif que les exercices et toutes les questions soient traitées dans l'ordre, quitte à laisser de l'espace entre chaque question. Les copies ne respectant pas cette règle ne seront pas corrigées (et recevront donc automatiquement la note 0).
5. Rappel : les copies mal présentées et/ou illisibles ne seront pas corrigées (et recevront donc automatiquement la note 0).
6. L'accent sera mis sur la rigueur et la précision de vos réponses. Les réponses non justifiées ne seront pas prises en compte.
7. Bon courage !

Exercice 1 (15 points)

1. (1 pt) Soit X une variable aléatoire réelle de loi normale centrée réduite. La variable aléatoire $\max(X, 0)$ admet-elle une densité par rapport à la mesure de Lebesgue ? Si oui, la déterminer.
2. (1 pt) Soit X une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur $[0, 1]$ et Y une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$, indépendante de X. La variable aléatoire $X + Y$ admet-elle une densité par rapport à la mesure de Lebesgue ? Si oui, la déterminer.
3. (2 pts) Soient X et Y deux variables aléatoires réelles i.i.d de loi normale centrée réduite. Soit ε une variable aléatoire réelle indépendante de (X, Y), satisfaisant $P(\varepsilon = 1) = P(\varepsilon = -1) = 1/2$.
   0,5 a) Le vecteur aléatoire $(X + Y, X - Y)$ est-il gaussien ?
   0,5 b) Le vecteur aléatoire $(X + Y, X + Y)$ est-il gaussien ?
   0,5 c) Le vecteur aléatoire $(X + Y, X + \varepsilon Y)$ est-il gaussien ?
   0,5 d) Le vecteur aléatoire $(X + \varepsilon Y, X - \varepsilon Y)$ est-il gaussien ?
4. (6 pts) Soit $\theta > 0$ et soient X, Y deux variables aléatoires réelles i.i.d de loi uniforme sur $[0, \theta]$.
   1 a) Expliquer pourquoi on peut définir une variable aléatoire notée $\sqrt{X/Y}$ de manière non ambiguë.
   3 b) Montrer que $\sqrt{X/Y}$ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue, qu'on déterminera *(pour vérifier la cohérence de votre résultat, posez-vous la question suivante : le résultat doit-il dépendre du paramètre θ ?)*.
   1 c) Montrer que la variable aléatoire $\sqrt{X/Y}$ est intégrable.
   1 d) Déterminer $\mathbb{E}[\sqrt{X/Y}|X]$ et $\mathbb{E}[\sqrt{X/Y}|Y]$.
5. (2 pts) Pour tout entier $n \geq 1$, soit X_n une variable aléatoire de loi $\text{Exp}(1/n)$. Montrer que X_n ne converge pas en distribution.
6. (3 pts) Soit X un vecteur aléatoire réel de taille $d \geq 1$ de carré intégrable. Soit Σ sa matrice de variance-covariance, et soit r son rang. Montrer qu'il existe un sous-espace affine A de $\mathbb{R}^d$ de dimension r tel que $X \in A$ presque sûrement.

Exercice 2 (18 points)

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \lambda e^{-\lambda(x-a)} \mathbb{1}_{x>a}$.

1. (1 pt) Vérifier que la fonction f ainsi définie est une densité par rapport à la mesure de Lebesgue. Dans toute la suite de l'exercice, on considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires réelles i.i.d admettant f comme densité par rapport à la mesure de Lebesgue.
2. (1 pt) Vérifier que $X_1 - a$ suit la loi exponentielle de paramètre λ.
3. (6 pts) Pour tout $n \geq 1$, on pose $\hat{a}_n = \min(X_1, \dots, X_n)$ et $\hat{\lambda}_n = \frac{1}{\bar{X}_n - \hat{a}_n}$.

*

1 a) Vérifier que pour tout $n \geq \cancel{1}$ 2 $\bar{X}_n > \hat{a}_n$ presque sûrement, et que $\hat{\lambda}_n$ est donc bien définie de manière non ambiguë.

2 b) Déterminer la fonction de répartition de $n(\hat{a}_n - a)$, pour tout $n \geq 1$.

1 c) En déduire que $\hat{a}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} a$.

1 d) Montrer que $\hat{a}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{p.s}} a$.

1 e) Montrer que $\hat{\lambda}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} \lambda$.

4. (1 pt) Montrer que $\sqrt{n}(\hat{a}_n - a) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0$.
5. (2 pts) En déduire que $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \hat{a}_n - 1/\lambda)$ converge en distribution vers une loi normale dont on déterminera les paramètres.
6. (3 pts) Soit $(T_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires strictement positives presque sûrement et $\theta > 0$. Supposons que $\sqrt{n}(T_n - \theta) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{(d)}} Z$, où Z est une variable aléatoire réelle.

   1 a) Montrer que $T_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} \theta$.

   2 b) Montrer que $\sqrt{n}\left(\frac{1}{T_n} - \frac{1}{\theta}\right)$ converge en distribution vers une variable aléatoire qu'on déterminera.
7. (1 pt) Déduire des questions précédentes que $\sqrt{n}(\hat{\lambda}_n - \lambda) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{(d)}} \mathcal{N}(0, \lambda^2)$.
8. (3 pts) Fixons $\alpha \in (0,1)$. Proposer deux suites d'intervalles de confiance de niveau asymptotique α pour λ et pour a respectivement. On rappelle qu'une
1,5+1,5 suite d'intervalles de confiance de niveau asymptotique α pour λ (resp. a) est une suite $(I_n)_{n\geq 1}$ d'intervalles, dont les bornes sont des variables aléatoires dont l'expression ne dépend ni de λ ni de a, telle que $P(I_n \ni \lambda) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - \alpha$ (resp. $P(I_n \ni a) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - \alpha$).