Théorie des probabilités
Livret d'exercices

1 Rappels de théorie de la mesures et d'intégration

Exercice 1

Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable, ν une mesure sur $(E, \mathcal{E})$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable.

1. Montrer que si f est positive et satisfait $\int_E f(x)\,\mathrm{d}\nu(x) = 0$, alors elle est nulle ν-presque partout.
2. Montrer que si f est strictement positive et $\int_A f(x)\,\mathrm{d}\nu(x) = 0$ pour un certain $A \in \mathcal{E}$, alors $\nu(A) = 0$.
3. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{E}$, si $\nu(A) = 0$, alors $\int_A f(x)\,\mathrm{d}\nu(x) = 0$.

Exercice 2

Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable, et soit ν une mesure sur $(E, \mathcal{E})$. Montrer que si f et g sont deux fonctions mesurables sur E, à valeurs réelles, satisfont $\int_A f(x)\,\mathrm{d}\nu(x) = \int_A g(x)\,\mathrm{d}\nu(x)$ quel que soit $A \in \mathcal{E}$, alors $f = g$ ν-presque partout.

Indice : on pourra considérer les ensembles mesurables $\{x \in E : f(x) < g(x)\}$ *et* $\{x \in E : f(x) > g(x)\}$*, et utiliser des résultats de l'exercice précédent.*

Exercice 3

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$ et $\int_A g(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$, lorsque :

1. μ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et $A = [0, t]$, où $t > 0$;
2. μ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ et $A = \{0, 1, \ldots, n\}$, où $n \geq 0$ est un entier ;
3. μ est la mesure de comptage sur $\{0, 1\}$ et $A = \{0, 1\}$;
4. $\mu = \delta_1 + (1/2)\delta_2 + \ldots + (1/n)\delta_n$ et $A = \mathbb{R}$, où n est un entier strictement positif ;
5. $\mu = \lambda + \nu$ et $A = [-t, t]$, où λ est la mesure de Lebesuge sur $\mathbb{R}$, ν est la mesure de comptage sur $\mathbb{Z}$ et t est un réel strictement positif ;
6. μ est la mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, de densité donnée par $x^2 \mathbb{1}_{x \in [-1,1]}, x \in \mathbb{R}$, et $A = \mathbb{R}$.

Exercice 4

Soit ν la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$.

1. Les fonctions $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto e^{-xy}$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto e^{-xy^2}$ sont-elles intégrables sur $\mathbb{N}^* \times [0,\infty[$ par rapport à la mesure produit $\nu \otimes \lambda$, où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$?
2. Soit μ la mesure sur $\mathbb{R}$ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, admettant pour densité la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.
   a) La fonction $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto e^{-xy^2}$ est-elles intégrable sur $\mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$ par rapport à la mesure produit $\nu \otimes \mu$?
   b) La même fonction est-elle intégrable sur $\mathbb{N}^* \times [1,\infty[$ par rapport à la mesure produit $\nu \otimes \mu$?
3. Après avoir justifié son existence, calculer
$$\int_{\mathbb{N}^* \times [0,\infty[} e^{-x^2 y} \, \mathrm{d}\nu(x) \, \mathrm{d}y.$$
4. Déterminer la limite, lorsque $n \to \infty$, de
$$\frac{1}{\log n} \int_{\{1,2,\ldots,n\} \times [0,\infty[} e^{-x^2 y^2} \, \mathrm{d}\nu(x) \, \mathrm{d}y.$$

Exercice 5

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note μ_x la mesure sur $\mathbb{R}$ admettant une densité f_x par rapport à la mesure de Lebesgue, donnée par
$$f_x(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2}}, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

1. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, μ_x est une mesure de probabilité.
2. Calculer l'intégrale
$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} y(x+y) \, \mathrm{d}\mu_x(y) \right) \mathrm{d}\nu(x)$$
lorsque ν est :
   a) la mesure Dirac en 0;
   b) $\delta_0 + \delta_1$;
   c) la mesure uniforme sur $[0,1]$;
   d) la somme de la loi exponentielle de paramètre 1 et de la mesure de comptage sur $\{-1,1\}$.

e) la somme de la loi exponentielle de paramètre 1 et de la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.

Exercice 6

1. En utilisant le changement de variables $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, dont on précisera le domaine, et en justifiant rigoureusement et précisément toutes les étapes du changement de variable, calculer l'intégrale double
$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, \mathrm{d}x$.

Exercice 7 Tribus engendrées par des parties

Soit Ω un ensemble non vide quelconque. On rappelle que pour toute famille non vide $\mathcal{G}$ de parties de Ω, on note $\sigma(\mathcal{G})$ la tribu engendrée par $\mathcal{G}$, i.e., la plus petite (au sens de l'inclusion) tribu de Ω contenant $\mathcal{G}$.

1. Vérifier que pour toute famille non vide $\mathcal{G}$ de parties de Ω, $\sigma(\mathcal{G})$ existe bien, et qu'elle est donnée par l'intersection de toutes les tribus de Ω contenant $\mathcal{G}$.
2. Soit $\mathcal{G}$ une famille non vide de parties de Ω. Montrer que $\mathcal{G}$ est donnée par l'ensemble de toutes les unions au plus dénombrables d'intersections au plus dénombrables, ainsi que des intersections au plus dénombrables d'unions au plus dénombrables, d'éléments de $\mathcal{G}$ et/ou de leurs complémentaires.
3. Montrer que pour tout $A \subseteq \Omega$, $\sigma(\{A\}) = \{\emptyset, A, A^{\complement}, \Omega\}$.

Exercice 8 Tribus engendrées par des fonctions

Soit Ω un ensemble non vide quelconque et $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable.

1. Pour toute fonction $f : \Omega \to E$, on définit la *tribu engendrée par* f $\sigma(f)$ comme étant la plus petite tribu de Ω telle que f soit mesurable. Montrer que $\sigma(f)$ est la tribu image-réciproque de $\mathcal{E}$ par f.
2. Soit $A \subseteq \Omega$. Montrer que $\sigma(1_A) = \sigma(\{A\})$.
3. Plus généralement, soit I un ensemble non vide, $((E_i, \mathcal{E}_i))_{i\in I}$ et, pour chaque $i \in I$, $f_i : \Omega \to E_i$ une fonction quelconque. La tribu engendrée par la famille $(f_i)_{i\in I}$ est définie comme la plus petite tribu de Ω telle que chaque $f_i, i \in I$, soit mesurable. On la note $\sigma((f_i)_{i\in I})$. Vérifier que
$$\sigma((f_i)_{i\in I}) = \sigma\left(\bigcup_{i\in I} \sigma(f_i)\right).$$

Exercice 9

1. Soit Ω un ensemble quelconque. Montrer que la tribu engendrée par les singletons de Ω est l'ensemble des parties A de Ω telles que A ou sont complémentaire est au plus dénombrable.
2. En déduire que la tribu discrète de $\mathbb{R}$ n'est pas engendrée par les singletons de $\mathbb{R}$.
3. En déduire que, plus généralement, si Ω n'est pas au plus dénombrable, alors sa tribu discrète n'est pas engendrée par les singletons de Ω.

Exercice 10

Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable. Un élément $A \in \mathcal{E}$ est dit minimal si et seulement s'il est non vide et si les seuls éléments de $\mathcal{E}$ inclus dans A sont $\emptyset$ et A lui-même.

1. Quels sont les éléments minimaux dans la tribu grossière ? Dans la tribu discrète ?
2. Si $E = \mathbb{R}$, quels sont les éléments minimaux de la tribu Borélienne ?
3. Pour tout $A \in \mathcal{E}$, on considère l'application $\delta_A : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $B \in \mathcal{E}$,

$$\delta_A(B) = \begin{cases} 1 \text{ si } B \cap A \neq \emptyset \\ 0 \text{ sinon } . \end{cases}$$

   Montrer que δ_A est une mesure de probabilité sur $(E, \mathcal{E})$ si et seulement si A est minimal.
4. Supposons la tribu $\mathcal{E}$ finie.
   a) Montrer qu'elle est engendrée par ses éléments minimaux.
   b) En déduire que le cardinal de $\mathcal{E}$ est nécessairement une puissance de deux.

* Exercice 11 Tribus vues comme des espaces vectoriels

Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable. On définit les opérations suivantes sur $\mathcal{E}$:

- $A + B = A \Delta B$ (différence symétrique), pour $A, B \in \mathcal{E}$;
- $\lambda A = A$ si $\lambda = 1$, $\lambda A = 0$ si $\lambda = 0$, pour tout $\lambda \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

1. Vérifier que $\mathcal{E}$, muni de ces deux opérations, a une structure d'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
2. Montrer que la tribu $\mathcal{E}$ est finie si et seulement si elle est de dimension finie, vue comme $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espace vectoriel.
3. En déduire que si $\mathcal{E}$ est finie, alors son cardinal est une puissance de deux.

Exercice 12 Théorème de transfert

Soient $(E, \mathcal{E})$ et $(F, \mathcal{F})$ deux espaces mesurables, μ une mesure sur $(E, \mathcal{E})$ et $g : E \to F$ une fonction mesurable. On note $\nu = g\#\mu$ la mesure image de μ par g, i.e., la mesure sur $(F, \mathcal{F})$ définie par $\nu(B) = \mu(g^{-1}(B))$, pour tout $B \in \mathcal{F}$.

1. Vérifier que ν est bien une mesure sur $(F, \mathcal{F})$.
2. Soit $\phi : F \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable.
   a) Montrer que $\phi \in L^1(\nu) \iff \phi \circ g \in L^1(\mu)$.
   b) Vérifier que dans ce cas,
   $$\int_E \phi(g(x))\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_F \phi(y)\,\mathrm{d}\nu(y).$$
3. Soit $\phi : F \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable positive. Montrer que
   $$\int_E \phi(g(x))\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_F \phi(y)\,\mathrm{d}\nu(y),$$
   où on attribue la valeur infinie à toute intégrale d'une fonction mesurable positive non intégrable.

Exercice 13

Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable et μ, ν deux mesures σ-finies sur $(E, \mathcal{E})$. On suppose que μ admet une densité par rapport à ν, que l'on note f. Montrer que :

1. Pour toute fonction mesurable $\phi : E \to \mathbb{R}$, $\phi \in L^1(\mu) \iff \phi f \in L^1(\nu)$ et que dans ce cas,
   $$\int_E \phi(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_E \phi(x) f(x)\,\mathrm{d}\nu(x).$$
2. Pour toute fonction mesurable positive $\phi : E \to \mathbb{R}$,
   $$\int_E \phi(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_E \phi(x) f(x)\,\mathrm{d}\nu(x),$$
   où on attribue la valeur infinie à toute intégrale d'une fonction mesurable positive non intégrable.

2 Espaces de probabilités

2.1 Généralités

Exercice 14 Propriétés fondamentales

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité. Montrer les propriétés suivantes.

1. Pour tout $A, B \in \mathcal{A}$, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
2. Pour tout $A, B \in \mathcal{A}$, $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$.
3. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, $P(A^{\complement}) = 1 - P(A)$.
4. Pour tout $A, B \in \mathcal{A}$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
5. Pour tout $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.
6. Pour tout $A, B \in \mathcal{A}$, $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.
7. Pour tout $A_1, \ldots, A_N \in \mathcal{A}$ $(N \geq 2)$, $P\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{N} P(A_n)$.
8. Pour toute suite $(A_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, $P\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.
9. Pour tous $B \in \mathcal{A}$, $N \geq 1$ et $A_1, \ldots, A_N \in \mathcal{A}$ tels que $A_n \cap A_m = \emptyset$ pour tous entiers distincts $m, n \in \{1, \ldots, N\}$ et $P(A_1 \cup \ldots \cup A_N) = 1$, $P(B) = \sum_{i=1}^{N} P(B \cap A_i)$.
10. Pour tout $B \in \mathcal{A}$ et toute suite $(A_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, telle que $A_n \cap A_m = \emptyset$ pour tous entiers distincts $m, n \geq 1$ et $P\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = 1$, $P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B \cap A_n)$.
11. Pour toute suite croissante $(A_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, $P\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.
12. Pour toute suite décroissante $(A_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, $P\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.

Exercice 15 Expériences aléatoires

1. Dans chacun des cas suivants, définir un espace de probabilité adapté à l'expérience aléatoire décrite.
   a) On lance une pièce équilibrée, et on observe sur quel côté la pièce tombe.
   b) On lance une pièce équilibrée deux fois, et on observe sur quel côté la pièce est tombé pour chaque lancé.
   c) Une pièce équilibrée est lancée deux fois, mais on sait uniquement si la pièce est tombé deux fois du même côté.
   d) On observe le résultat du lancé d'un dé à 8 faces, dont la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro inscrit sur cette face.
   e) On dispose de deux urnes: la première contient une boule rouge et deux boules bleues, la seconde contient trois boules rouges et une boule bleue. On lance une pièce équilibrée; si on obtient pile, on tire au hasard une boule dans la première urne, sinon, on tire au hasard une boule dans la seconde urne. Les boules d'une même couleur sont indiscernables.

2. Pour chacun des cas précédents, on s'intéresse aux propositions suivantes. Pour chacune d'elles, déterminer si elle correspond à un événement (i.e., un élément de la tribu) et, le cas échéant, déterminer cet événement (i.e., l'élément de la tribu associé) et calculer sa probabilité.
   a) "La pièce tombe sur pile ou face" ; "La pièce tombe sur face"
   b) "La pièce est tombée sur deux côtés différents" ; "La pièce est tombée sur pile au premier lancer"
   c) "La pièce est tombée sur deux côtés différents" ; "La pièce est tombée sur pile au second lancer"
   d) "Le résultat du dé est 2" ; "Le résultat du dé est pair"
   e) "La pièce est tombée sur pile" ; "Une boule rouge est tirée" ; "La boule bleue qui avait été déposée en premier dans l'urne a été tirée".

* Exercice 16 Formule de Poincaré

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité.

1. Montrer que pour tous $A, B, C \in \mathcal{A}$,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

2. Généralisation: A l'aide d'une récurrence, montrer que pour tout entier $n \geq 1$ et pour toute famille d'événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \mathcal{P}_k(\{1,2,\ldots,n\})} P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right),$$

où, pour tout $k = 1, \ldots, n$, $\mathcal{P}_k(\{1, 2, \ldots, n\})$ est l'ensemble des parties de $\{1, 2, \ldots, n\}$ qui continennent exactement k éléments.

Exercice 17 Espaces de probabilités finis

Soit Ω un ensemble fini non vide, qu'on note $\Omega = \{a_1, \ldots, a_n\}$ où $n = \#\Omega$.

1. Soient $p_1, \ldots, p_n$ des nombres réels quelconques, et soit $P : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} p_k \mathbb{1}_{a_k \in A} = \sum_{1 \leq k \leq n : a_k \in A} p_k,$$

pour toute partie A de Ω. Montrer que P est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ si et seulement si $p_1, \ldots, p_n \geq 0$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$.

2. Vérifier que toute probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est entièrement déterminée par les nombres $p_k = P(\{a_k\})$, $k = 1, \ldots, n$, qui sont positifs et dont la somme vaut 1.

Exercice 18 Limites inférieure et supérieure d'événements

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements. On définit les *limites inférieure* et *supérieure* de la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ de la manière suivante:

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{p=n}^{\infty} A_p$$

et

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{p=n}^{\infty} A_p.$$

1. Vérifier que $\liminf_{n\to\infty} A_n$ est l'ensemble des $\omega \in \Omega$ qui sont dans tous les A_n à partir d'un certain rang et que $\limsup_{n\to\infty} A_n$ est l'ensemble des $\omega \in \Omega$ qui sont dans une infinité de A_n.
2. Montrer que $\liminf_{n\to\infty} A_n$ et $\limsup_{n\to\infty} A_n$ sont dans $\mathcal{A}$.
3. Prouver que $\liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_n$.
4. Montrer la suite d'inégalités suivante:

$$P\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} P(A_n) \leq \limsup_{n\to\infty} P(A_n) \leq P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right).$$

2.2 Probabilités conditionnelles et événements indépendants

Exercice 19 Formule des probabilités totales

1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et soient $B_1, B_2, \ldots, B_n \in \mathcal{A}$ formant une partition de Ω, tels que $P(B_k) > 0$ pour tout $k = 1, \ldots, n$. Soit $A \in \mathcal{A}$ tel que $P(A) \neq 0$. Montrer que, pour tout $k = 1, \ldots, n$,

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}.$$

2. On considère n urnes, et on suppose que pour $k = 1, \ldots, n$, la k-ème urne contient k boules rouges et $n+1-k$ boules vertes. On lance un dé équilibré à n faces, et on tire au hasard une boule dans l'urne portant le numéro obtenu au lancé du dé. Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$ un nombre fixé. Sachant qu'on a tiré une boule verte, quelle est la probabilite que le résultat du dé fût k ?

Exercice 20

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité. Soient $A, B \in \mathcal{A}$.

1. Montrer que $A \perp\!\!\!\perp B \iff A^{\complement} \perp\!\!\!\perp B \iff A \perp\!\!\!\perp B^{\complement} \iff A^{\complement} \perp\!\!\!\perp B^{\complement}$.
2. En déduire que A et B sont indépendants si et seulement si les tribus engendrées par A et B, i.e., $\sigma(\{A\})$ et $\sigma(\{B\})$, sont indépendantes.
3. Supposons que $P(A), P(B) > 0$. Montrer qu'alors, si A et B sont disjoints, ils ne peuvent pas être indépendants.

Exercice 21

1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements. Montrer l'équivalence des assertions suivantes :
   (i) Les événements A_n, pour $n \geq 1$, sont indépendants.
   (ii) Pour tout ensemble $I \subseteq \mathbb{N}^*$ fini,
   $$P\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} P(A_i)$$
   (iii) Pour tout $n \geq 1$, $A_1, \ldots, A_n$ sont indépendants.
2. Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable et $(\mathcal{E}_n)_{n\geq 1}$ une suite de sous-tribus de $\mathcal{E}$. Soit P une probabilité sur $(E, \mathcal{E})$. Montrer l'équivalence des assertions suivantes :
   (i) Les tribus $\mathcal{E}_n$, pour $n \geq 1$, sont indépendantes.
   (ii) Pour tout $n \geq 1$, $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n$ sont indépendantes.

* Exercice 22

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on note $A^1 = A$ et $A^{-1} = A^{\complement}$.

1. Soient $n \geq 1$ et $A_1, \ldots, A_n$ des événements. Montrer l'équivalence des assertions suivantes :
   (i) Les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont indépendants.
   (ii) Les tribus $\sigma(A_1), \ldots, \sigma(A_n)$ sont indépendantes.
   (iii) Pour tout $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$,
   $$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^{\varepsilon_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i^{\varepsilon_i})$$
   (iv) Pour tous sous-ensembles disjoints I et J de $\{1, \ldots, n\}$, $\bigcap_{i\in I} A_i$ et $\bigcap_{j\in J} A_j$ sont indépendants.

(v) Pour tous sous-ensembles disjoints I et J de $\{1, \ldots, n\}$, $\bigcup_{i \in I} A_i$ et $\bigcup_{j \in J} A_j$ sont indépendants.

2. Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'événements. Montrer l'équivalence des assertions suivantes *(on pourra utiliser des résultats de l'exercice 21)* :
   (i) Les événements $A_1, A_2, \ldots$ sont indépendants.
   (ii) Les tribus $\sigma(A_1), \sigma(A_2), \ldots$ sont indépendantes.
   (iii) Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$,
   $$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^{\varepsilon_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i^{\varepsilon_i})$$
   (iv) Pour tous sous-ensembles disjoints I et J de $\mathbb{N}^*$, $\bigcap_{i \in I} A_i$ et $\bigcap_{j \in J} A_j$ sont indépendants.
   (v) Pour tous sous-ensembles disjoints I et J de $\mathbb{N}^*$, $\bigcup_{i \in I} A_i$ et $\bigcup_{j \in J} A_j$ sont indépendants.

Exercice 23

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité.

1. Soient $n \geq 1$ et $A_1, \ldots, A_n$ des événements indépendants. En utilisant la formule de Poincaré (Exercice 16), montrer que $A_1^{\complement}, \ldots, A_n^{\complement}$ sont indépendants.
2. Généraliser le résultat de la question précédente à une suite d'événements indépendants.

Exercice 24 Indépendance et indépendance mutuelle

1. On lance un dé non pipé deux fois, et on considère les événements suivants:
   - A: "le résultat du second dé est 1, 2 ou 5"
   - B: "le résultat du second dé est 4, 5 ou 6"
   - C: "la somme des résultats des deux dés vaut 9"

   a) Montrer que $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.
   b) Montrer que $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$, $P(A \cap C) \neq P(A)P(C)$ et $P(B \cap C) \neq P(B)P(C)$. Que pouvez-vous en conclure ?
2. On considère cette fois-ci les événements suivants.
   - A: "le résultat du premier dé est pair"
   - B: "le résultat du second dé est pair"
   - C: "la somme des résultats des deux dés est impaire"

Montrer que A, B, C sont deux à deux indépendants et que pourtant, ils ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice 25 L'indépendance dépend du choix de la probabilité !

Soit $\Omega = \{0,1\} \times \{0,1\}$, muni de sa tribu discrète. On définit les deux mesures de probabilité P et Q de la manière suivante :

$$P(\{(0,0)\}) = P(\{(0,1)\}) = P(\{(1,0)\}) = 1/4$$

et

$$Q(\{(0,0)\}) = 1/2, Q(\{(0,1)\}) = 1/6, Q(\{(1,0)\}) = 1/6$$

(on vérifiera que ces égalités suffisent à définir P et Q de manière complète). Considérons les événements $A = \{(0,0),(0,1)\}$ et $B = \{(0,0),(1,0)\}$. Montrer que A et B sont indépendants dans l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, mais qu'ils ne le sont pas dans $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), Q)$.

Exercice 26 Indépendance et indépendance conditionnelle

On considère le lancé de deux dés non pipés et on définit les évéments suivants:

- A: “le résultat du premier dé est pair”
- B: “le résultat du second dé est impair”
- C: “la somme des résultats des deux dés est paire”

Montrer que A et B sont indépendants, mais qu'ils ne sont pas indépendants conditionnellement à C (i.e., pour la probabilité conditionnelle sachant C).

Exercice 27 Lemme de Borel-Cantelli

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité, et $A_1, A_2, \ldots$ une suite d'événements. On rappelle les deux définitions suivantes:

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{p=n}^{\infty} A_p$$

et

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{p=n}^{\infty} A_p.$$

1. Montrer que si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, alors $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$ (Première partie du **lemme de Borel-Cantelli**).

2. On suppose, dans cette question que les événements $A_1, A_2, \ldots$ sont indépendants.
   a) Montrer que $\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right)^{\complement} = \liminf_{n\to\infty} A_n^{\complement}$.
   b) Montrer que pour toute suite d'événements $B_1, B_2, \ldots$,
   $$P(\liminf_{n\to\infty} B_n) = \lim_{n\to\infty}\left[\lim_{q\to\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{q} B_k\right)\right].$$
   c) En déduire que
   $$P(\liminf_{n\to\infty} A_n^{\complement}) = \lim_{n\to\infty}\left[\lim_{q\to\infty} \prod_{k=n}^{q}(1-P(A_k))\right].$$
   Indice: On pourra utiliser le fait que $A_1, A_2, \ldots$ sont mutuellement indépendants si et seulement si $A_1^{\complement}, A_2^{\complement}, \ldots$ sont mutuellement indépendants.
   d) On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} \geq 1-x$. En déduire que si $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, alors $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$ (Deuxième partie du **lemme de Borel-Cantelli**).
3. Application (expérience de pensée) : si on place un chimpanzé d'espérance de vie infinie devant un ordinateur et que celui-ci tape sur le clavier de manière complètement aléatoire sans jamais s'arrêter, montrer que dans la suite infinie des caractères obtenus, on pourra lire, une infinité de fois, *A La Recherche du Temps Perdu*, sans aucune faute d'orthographe.

Exercice 28 Une application du lemme de Borel-Cantelli

On souhaite montrer qu'il n'existe pas de probabilité P sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ telle que pour tout entier $n \geq 1$, $P(A_n) = 1/n$, où A_n est l'ensemble des multiples de n. Raisonnons par l'absurde, et supposons l'existence d'une telle probabilité P.

1. Montrer que pour tout couple (p, q) de nombres premiers distincts, A_p et A_q sont nécessairement indépendants.
2. Soit $(p_k)_{k\geq 1}$ la suite croissante des nombres premiers. Vérifier que la série de terme général $P(A_{p_k}), k \geq 1$, est divergente.
3. Conclure en utilisant le lemme de Borel-Cantelli.

Exercice 29 Loi du zéro-un de Kolmogorov

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $(\mathcal{A}_n)_{n\geq 1}$ une suite de sous-tribus de $\mathcal{A}$, supposées mutuellement indépendantes. Pour tout $n \geq 1$, on définit $\mathcal{B}_n$ la tribu engendrée par $\bigcup_{p\geq n} \mathcal{A}_p$, i.e., la plus petite tribu contenant toutes les $\mathcal{A}_p$ pour $p \geq n$, et $\mathcal{A}_\infty = \bigcap_{n\geq 1} \mathcal{B}_n$, qu'on appelle *tribu asymptotique*.

1. Vérifier que $\mathcal{A}_\infty$ est une sous-tribu de $\mathcal{A}$.
2. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que pour tout $n \geq 1$, $A_n \in \mathcal{A}_n$. Vérifier que $\limsup_{n\to\infty} A_n$ et $\liminf_{n\to\infty} A_n$ sont des éléments de la tribu asymptotique.
3. Soit $A \in \mathcal{A}_\infty$ et $n \geq 1$. On va montrer que pour tout $B \in \mathcal{A}_n$, $A \perp\!\!\!\perp B$.
   a) Vérifier que pour tout $A \in \sigma\left(\bigcup_{p\geq n+1} \mathcal{A}_p\right)$.
   b) En déduire, avec une justification très précise, que $A \perp\!\!\!\perp B$ *(on rappelle que si $\mathcal{G}$ est un ensemble non vide de parties de Ω, alors tout élément de $\sigma(\mathcal{G})$ peut s'écrire ou bien comme une union au plus dénombrable d'intersections au plus dénombrables d'éléments de $\mathcal{G}$ et/ou de leurs complémentaires, ou bien comme une intersection au plus dénombrable d'unions au plus dénombrables d'éléments de $\mathcal{G}$ et/ou de leurs complémentaires).*
4. Déduire des questions précédentes que tout élément de la tribu asymptotique est indépendant de lui-même.
5. En déduire la loi du zéro-un de Kolmogorov : tout élément de la tribu asymptotique est de probabilité 0 ou 1.
6. A l'aide de la loi du zéro-un de Kolmogorov, proposer une preuve alternative de la deuxième partie du lemme de Bortel-Cantelli : si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'éléments indépendants de $\mathcal{A}$, alors $P(\limsup_{n\geq 1} A_n) \in \{0, 1\}$ et cette probabilité vaut 0 si et seulement si la série des $P(A_n), n \geq 1$ est convergente (cf. exercice 27).

3 Variables aléatoires et lois de probabilités

Sauf mention contraire, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, même si celui-ci n'est pas mentionné.

3.1 Généralités

Exercice 30

Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable quelconque et Q une probabilité sur $(E, \mathcal{E})$. Montrer qu'il existe toujours une variable aléatoire à valeurs dans E dont la loi est Q, quitte à pouvoir choisir l'espace de probabilité sur lequel on définit la variable aléatoire *(cet exercice valide la légitimité des énoncés commençant par "Soit X une variable aléatoire de loi...")*.

Exercice 31

Vérifier que deux variables aléatoires qui sont égales presque sûrement ont la même loi. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 32

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$. Supposons que $X \in A$ presque sûrement, où $A \in \mathcal{E}$. Soit $f : A \to F$ une fonction mesurable à valeurs dans un espace mesurable $(F, \mathcal{F})$.

1. Montrer qu'on peut définir une variable aléatoire Y à valeurs dans F, telle que pour tout $\omega \in X^{-1}(A)$, $Y(\omega) = f(X(\omega))$.
2. Vérifier que si Y et Z sont deux variables aléatoires dans F satisfaisant $Y(\omega) = Z(\omega) = f(X(\omega))$ pour tout $\omega \in X^{-1}(A)$, alors $Y = Z$ presque sûrement. On s'autorise, abusivement, à noter de telles variables aléatoires "$f(X)$", même si $f(X)$ n'est pas définie sur tout Ω.
3. Déduire des questions précédentes qu'on peut bien définir :
   a) $1/X$, lorsque $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$;
   b) $\log(1/X)$ lorsque $X \sim \mathcal{U}([0, 1])$;
   c) $\sqrt{X}$ lorsque X est une variable aléatoire réelle de loi exponentielle.

3.2 Lois et variables discrètes

Exercice 33 Lois discrètes

Soit E un ensemble au plus dénombrable et soit X une variable aléatoire dans $(E, \mathcal{P}(E))$. Montrer que la densité de X par rapport à la mesure de comptage ν sur E est donnée par sa fonction de masse, i.e., la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ satisfaisant

$$\forall x \in E, \quad f(x) = P_X(\{x\}) = P(X = x).$$

Exercice 34

Soit E un ensemble au plus dénombrable, muni de sa tribu discrète. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction positive telle que $\sum_{x \in E} f(x) = 1$. Montrer qu'il existe une unique loi de probabilité sur E dont f est la fonction de masse.

Exercice 35

Soit X une variable aléatoire dans un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$ dont la tribu $\mathcal{E}$ contient tous les singletons. Soit F un sous-ensemble au plus dénombrable de E.

1. Vérifier que $F \in \mathcal{E}$.
2. Supposons que $P(X \in F) = 1$.
   a) Montrer qu'alors l'ensemble des atomes de X est inclus dans F.
   b) En déduire que X est discrète.

c) Montrer qu'elle admet une densité par rapport à la mesure de comptage sur F, qu'on déterminera (rappeler la définition de la mesure de comptage sur F, qui est une mesure sur l'espace mesurable $(E, \mathcal{E})$).

3. Plus généralement, vérifier que toute variable aléatoire discrète admet une densité par rapport à la mesure de comptage sur l'ensemble de ses atomes.

Exercice 36 Exemples de lois discrètes

1. On lance deux dés équilibrés de manière indépendante, et on note X le résultat du premier dé, Y le résultat du second dé. Montrer que la loi de (X, Y) est la loi uniforme sur $\{1, \ldots, 6\}^2$.
2. Si E est un ensemble fini non vide, on rappelle que la loi uniforme sur E (muni de sa tribu discrète) est la probabilité dont la densité par rapport à la mesure de comptage sur E est constante.
   a) Quelle est la valeur de cette constante ?
   b) Est-il possible de définir la loi uniforme sur un ensemble infini dénombrable ?
3. Soit E un ensemble fini non vide, et soit (X, Y) une variable aléatoire dans $E \times E$ (muni de sa tribu discrète) de loi uniforme sur $E \times E$. Montrer que X et Y ont toutes deux la loi uniforme sur E.
4. Soit $E = \{1, \ldots, 6\}$ et soit (X, Y) une variable aléatoire sur $E \times E$ (muni de sa tribu discrète) telle que, pour tout $(x, y) \in \{1, \ldots, 6\}^2, P((X, Y) = (x, y))$ est proportionnelle à $x + y$. Calculer les lois de X, Y et $X + Y$.

Exercice 37

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant les propriétés suivantes :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$;
- L'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) > 0$ est au plus dénombrable ;
- $\sum_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 1$ (la somme ayant un sens grâce à la propriété précédente).

Démontrer qu'il existe une unique loi discrète sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dont f est la fonction de masse.

3.3 Densités

Exercice 38 Unicité presque partout de la densité

Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable quelconque et Q une probabilité sur $(E, \mathcal{E})$. Supposons que Q admet deux densités f et g par rapport à ν. Montrer qu'alors, $f(x) = g(x)$ pour ν-presque tout $x \in E$.

Exercice 39

Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable et ν une mesure sur $(E, \mathcal{E})$. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction positive et mesurable, satisfaisant $\int_E f(x)\,\mathrm{d}\nu(x) = 1$. Pour tout $B \in \mathcal{E}$, on pose $Q(B) = \int_B f(x)\,\mathrm{d}\nu(x)$.

1. Vérifier que Q est une probabilité sur $(E, \mathcal{E})$.
2. Soit X une variable aléatoire dans $(E, \mathcal{E})$ de loi Q, i.e., $P(X \in B) = Q(B)$, pour tout $B \in \mathcal{E}$. Montrer que X admet f comme densité par rapport à ν.

3.4 Variables aléatoires indépendantes

Exercice 40

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité et à valeurs dans deux espaces mesurables éventuellement différents. Supposons X et Y discrètes. Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout atome x de X et tout atome y de Y, $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$.

Exercice 41

Soient X et Y deux variables aléatoires de loi de Bernoulli. Montrer qu'elles sont indépendantes si et seulement si $P(X = 1, Y = 1) = P(X = 1)P(Y = 1)$.

* Exercice 42 Existence de variables de Bernoulli indépendantes (1)

1. Soit $\Omega = \{0, 1\}$, muni de sa tribu discrète $\mathcal{A}$.
   a) Existe-t-il une probablité P sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et une variable aléatoire réelle X définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que la loi de X soit la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$?

   b) Peut-on construire une probablité P sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et deux variables aléatoires réelles X et Y sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que X et Y sont i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre $1/2$?
2. Soit $n \geq 2$ un entier quelconque. Dans cette question, nous allons démontrer qu'on peut construire n variables aléatoires réelles i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, dès lors qu'on définit ces variables aléatoires sur espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$ assez riche. Soit $\Omega = \{0, 1\}^n$, muni de sa tribu discrète $\mathcal{A}$. Pour $i = 1, \ldots, n$, on pose $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ la fonction qui à chaque élément de Ω associe sa i-ème coordonnée.
   a) Vérifier que X_i est bien mesurable, quel que soit $i = 1, \ldots, n$.
   b) Soit P la mesure de probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Montrer que $X_1, \ldots, X_n$ sont alors des variables aléatoires i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.
   c) Adapter la construction précédente au cas où on souhaite construire n variables aléatoires i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$.

* Exercice 43 Existence de variables de Bernoulli indépendantes (2)

Dans cet exercice, on propose la construction d'une suite (infinie) de variables aléatoires i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.

Soit $\Omega = [0,1]$ muni de sa tribu borélienne, notée $\mathcal{A}$, et soit P la mesure de probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Pour tout entier $n \geq 1$, soit $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ la fonction qui à tout $\omega \in [0,1]$ associe sa n-ème décimale en base 2. Autrement dit, si on écrit $\omega = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}$, où $(a_i)_{i\geq 1}$ est une suite d'éléments de $\{0,1\}$ qui ne stationne pas à 1, alors $X_n(\omega) = a_n$ (on pourra vérifier que la suite des a_i, appelée décomposition dyadique de ω, est unique, pour chaque $\omega \in [0,1]$).

1. Vérifier que pour tout $n \geq 1$, X_n est une variable aléatoire.
2. Vérifier que pour tout $n \geq 1$, X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre p.
3. Vérifier que $X_1, X_2, \ldots$ sont indépendantes *(Indication: on vérifiera que pour tout $n \geq 1$, $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes).*

* Exercice 44 Existence de variables aléatoires indépendantes

Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable quelconque et Q une mesure de probabilité sur $(E, \mathcal{E})$. Le but de l'exercice est de montrer que pour tout entier $n \geq 2$, il existe des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ à valeurs dans E, i.i.d., de loi Q.

Soit $n \geq 1$ un entier fixé. Posons $\Omega = E^n$, muni de la tribu produit $\mathcal{A} = \mathcal{E}^{\otimes n}$ et de la mesure de probabilité produit $P = Q^{\otimes n}$. Pour chaque $i = 1, \ldots, n$, soit $X_i : \Omega \to E$ la fonction qui à chaque élément de Ω lui associe sa i-ème composante.

1. Vérifier que $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires.
2. Montrer qu'elles sont i.i.d., de loi Q.
3. Adapter la construction précédente pour montrer l'existence de variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ dans E, indépendantes, de lois $Q_1, \ldots, Q_n$, où les Q_i, $i = 1, \ldots, n$, sont des mesures de probabilités données sur $(E, \mathcal{E})$.

   Remarque: on peut aussi construire des suites (infinies) de variables aléatoires i.i.d. de loi donnée dans un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$, mais une telle construction requiert des outils plus élaborés, notamment, le théorème de Carathéodory.

3.5 Calcul de lois

Exercice 45 Difféomorphismes (1)

Les fonctions suivantes permettent-elles de définir un C^1-difféomorphisme à valeurs dans un ouvert de leur ensemble d'arrivée ? Le cas échéant, calculer le déterminant du Jacobien de la fonction réciproque, sur le bon domaine.

1. $\phi(x, y) = (x, y)$ pour $x, y \in \mathbb{R}$;
2. $\phi(x, y) = (x, x + y)$ pour $x, y \in \mathbb{R}$;
3. $\phi(x, y) = (x, x + y)$ pour $x, y \in (0, \infty)$;
4. $\phi(x, y) = (x, x + y)$ pour $x, y \in (0, 1)$;
5. $\phi(x, y) = (x + y, x - y)$ pour $x, y \in (0, 1)$;
6. $\phi(x, y) = (x^3, y^3)$ pour $x, y \in \mathbb{R}$;
7. $\phi(x, y) = (x^3, y^3)$ pour $x, y \in (0, \infty)$;
8. $\phi(x, y) = (x + y, x/(x + y))$ pour $x, y \in (0, \infty)$;
9. $\phi(x, y) = (x + y, x/(x + y))$ pour $x, y \in (1, \infty)$;
10. $\phi(x, y) = (x, x/(x + y))$ pour $x, y \in (1, \infty)$;
11. $\phi(x, y) = (x/(x + y), y/(x + y))$ pour $x, y \in (0, \infty)$;
12. $\phi(x) = Ax$ pour $x \in \mathbb{R}^d$, où $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ est une matrice inversible;
13. $\phi(x) = Ax$ pour $x \in (0, \infty)^d$, où $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ est une matrice inversible.

Exercice 46 Difféomorphismes (2)

Dans chacune des questions suivantes, on définit une fonction f et on demande de proposer une fonction h telle que le couple (f, h) définit un C^1-difféomorphisme à valeurs dans un ouvert à déterminer.

1. $f(x, y) = x + y$ pour $x, y \in \mathbb{R}^2$;
2. $f(x, y) = x + y$ pour $x, y > 0$;
3. $f(x, y) = xy$ pour $x, y > 0$;
4. $f(x, y) = 1/(x + y)$ pour $x, y > 0$;
5. $f(x, y) = 1/(x + y)$ pour $x, y > 1$;
6. $f(x, y) = x/(x + y)$ pour $x, y > 0$;
7. $f(x, y) = x^2 + y^2$ pour $x, y \in \mathbb{R}^*$;
8. $f(x, y) = x + y$ pour $x, y \in \mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$;
9. $f(x, y) = x + y$ pour $x, y \in (0, \infty)^d$;
10. $f(x) = Ax$ pour $x \in \mathbb{R}^d$, où $A \in \mathbb{R}^{p\times d}$ est une matrice de rang p, où $1 \leq p \leq d$.

Exercice 47

Soit $X = (X_1, X_2)$ un vecteur aléatoire réel dans $\mathbb{R}^2$. On suppose que X admet une densité par rapport à la mesure produit $\lambda \otimes \mu$, où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et μ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}^*$, et que cette densité est donnée par $f(x_1, x_2) = Ce^{-2x_1(x_2+1)}/x_1!$ si $x_1 \geq 0$ et $x_2 \in \mathbb{N}^*$, $f(x_1, x_2) = 0$ sinon, où $C > 0$ est un nombre fixé.

1. Déterminer la valeur de C.

2. Vérifier que $X_2 \in \mathbb{N}^*$ presque sûrement.
3. Déterminer la fonction de masse de X_2.
4. Rappeler pourquoi X_1 admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue, et déterminer celle-ci.

Exercice 48

Soit $\lambda > 0$ et soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ. Soit $T > 0$ un nombre fixé et soit $Y = \min(X, T)$ (par exemple, X représente la durée de vie d'une machine dans une usine, mais qu'on ne peut observer que jusqu'à un temps T). La variable aléatoire Y admet-elle une densité par rapport à la mesure de Lebesgue ?

Exercice 49

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire réel de loi uniforme dans $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$. Déterminer les lois de X et de Y.

Exercice 50

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire réel de loi uniforme dans $[a, b] \times [c, d]$, où a, b, c, d sont des nombres réels satisfaisant $a < b$ et $c < d$. On rappelle que pour tout compact K d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^2$, la loi uniforme sur K est la probabilité P sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ satisfaisant $P(A) = \frac{\mathsf{Vol}(A \cap K)}{\mathsf{Vol}(K)}$, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

1. Déterminer les lois de X et de Y.
2. Montrer que $X \perp\!\!\!\perp Y$.
3. Montrer que $X + Y$ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue, qu'on déterminera.

Exercice 51

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire réel de loi uniforme sur la boule euclidienne unité de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $X + Y$ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue, qu'on déterminera.

Exercice 52

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose que X suit la loi exponentielle de paramètre 1 et que Y suit la loi de Poisson de paramètre 1. Montrer que $X + Y$ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

Exercice 53

Soit $X \sim \mathcal{N}_2(0, I_2)$. Montrer que $\|X\|^2$ suit la loi exponentielle de paramètre $1/2$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$ *(on pourra utiliser un changement de variable en coordonnées polaires rigoureusement justifié).*

Exercice 54

Soit $\mu \in \mathbb{R}^d$ et $\Sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$ une matrice symétrique définie positive, où $d \geq 1$. Soit X un vecteur aléatoire de taille d de loi $\mathcal{N}_d(\mu, \Sigma)$. Pour tout $i = 1, \ldots, d$, vérifier que X_i, la i-ème coordonnée de X, suit la loi $\mathcal{N}(\mu_i, \Sigma_{i,i})$.

Exercice 55 Exercice préliminaire sur les vecteurs gaussiens

Soit $X \sim \mathcal{N}_d(\mu, \Sigma)$, où $d \geq 1$, $\mu \in \mathbb{R}^d$ et $\Sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$ est une matrice symétrique définie positive. Soit $p \leq d$ un entier strictement positif et $A \in \mathbb{R}^{p\times d}$ une matrice de rang plein (i.e., de rang p). On cherche à démontrer que $AX \sim \mathcal{N}_p(A\mu, A\Sigma A^\top)$, à l'aide de la formule de changement de variable.

1. Supposons que $p = d$. Vérifier que la fonction $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ donnée par $\phi(x) = Ax$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, est un C^1-difféomorphisme et conclure.
2. Supposons à présent que $p < d$.
   a) Montrer qu'on peut définir une matrice $B \in \mathbb{R}^{d\times d}$ qui est inversible et dont les p premières lignes sont données par la matrice A *(on pourra se contenter de montrer l'existence d'une telle matrice, sans la construire explicitement).*
   b) Vérifier que la fonction $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ définie par $\psi(x) = Bx, x \in \mathbb{R}^d$, est un C^1-difféomorphisme.
   c) Vérifier que $BX = (X_1, X_2)$, où $X_1 = AX$ et X_2 est un vecteur aléatoire dans $\mathbb{R}^{d-p}$.
   d) En conclure que AX admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue, et conclure.
   e) Retrouver le résultat de l'exercice précédent.

Exercice 56

Soit $X = (X_1, X_2)$ un vecteur aléatoire réel suivant la loi uniforme sur $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2\}$. Déterminer les lois marginales de X_1 et de X_2.

Exercice 57

1. Soit $X = (X_1, X_2)$ un vecteur aléatoire réel de loi uniforme sur l'ensemble $T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} \leq 1\right\}$, où $a, b > 0$ sont fixés. Montrer que X_1 et X_2 admettent des densités par rapport à la mesure de Lebesgue, qu'on déterminera.

2. Soit $X = (X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur aléatoire réel de loi uniforme sur l'ensemble $T = \left\{(x_1, \ldots, x_d) \in (\mathbb{R}_+)^d : \dfrac{x_1}{a_1} + \ldots + \dfrac{x_d}{a_d} \leq 1\right\}$, où $a_1, \ldots, a_d$ sont des nombres strictement positifs fixés. Pour chaque $j = 1, \ldots, d$, vérifier que X_j admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue, et déterminer celle-ci.

Exercice 58

Soit X une variable exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que X^2 et $\sqrt{X}$ sont continues et déterminer leurs densités.

Exercice 59

Soit X une variable aléatoire de Cauchy, i.e., une variable aléatoire réelle admettant pour densité, par rapport à la mesure de Lebesgue, la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, x \in \mathbb{R}$. Montrer que X et $1/X$ ont la même loi.

Exercice 60

1. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles continues, de densités respectives f et g. On suppose que X et Y sont indépendantes. A l'aide de la formule du changement de variables, montrer que le couple $(X, X+Y)$ admet une densité, et en déduire que la densité de $X+Y$ est la convolution de f et g, i.e., la fonction $f \star g$ définie par

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, où $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ et $\sigma_1^2, \sigma_2^2 > 0$. Déduire de la question précédente la loi de $X+Y$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, \ldots, n$. Déduire des questions précédentes la loi de $X_1 + \ldots + X_n$.
4. Pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda > 0$, on définit la loi Gamma de paramètres k et λ comme la loi continue sur $\mathbb{R}$ de densité:

$$f_{k,\lambda}(x) = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x>0}.$$

   a) Montrer que la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est une loi Gamma dont on déterminera les paramètres.
   b) Démontrer que la somme de deux variables aléatoires i.i.d. exponentielles de paramètre $\lambda > 0$ suit une loi Gamma, dont on déterminera les paramètres, en fonction de λ.
   c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que la somme de n variables aléatoires i.i.d. exponentielles de paramètre $\lambda > 0$ suit une loi Gamma, dont on déterminera les paramètres, en fonction de λ.

Exercice 61

Soit $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et P la loi uniforme sur Ω. Pour tout $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega$, on note $X(\omega) = \omega_1$ et $X(\omega) = \omega_2$. Montrer que X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi.

Exercice 62

1. Soit (X, Y) un vecteur aléatoire uniformément distribué dans le disque $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Montrer que X et Y sont identiquement distribuées, continues, et calculer leur densité. Sont-elles indépendantes ?
2. Soit (X, Y, Z) un vecteur aléatoire uniformément distribué dans la boule $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Montrer que X, Y et Z sont identiquement distribuées, continues, et calculer leur densité. Sont-elles indépendantes ?
3. Soit $(X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur aléatoire uniformément distribué dans la boule euclidienne unité de $\mathbb{R}^d$. Pour tout $k = 1, \ldots, d$, déterminer la densité du vecteur aléatoire $(X_1, \ldots, X_k)$.

Exercice 63

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires gaussiennes indépendantes. Montrer que pour tous réels $a_1, \ldots, a_n$, $a_1 X_n + \ldots + a_n X_n$ suit une loi normale, dont on déterminera les paramètres en fonction des paramètres respectifs des $X_i, i = 1, \ldots, n$ (on pourra raisonner par récurrence).

Exercice 64

Soient X et Y deux variables aléatoires i.i.d. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer les lois de $\dfrac{X}{X+Y}$ et $\dfrac{Y}{X+Y}$. Ces deux variables sont-elles indépendantes ?

Exercice 65

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, de lois respectives $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et $\mathcal{N}(0, \tau^2)$, où σ^2 et τ^2 sont des réels strictement positifs. Déterminer (après avoir justifié son existence) la densité de X/Y par rapport à la mesure de Lebesgue.

Exercice 66

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la densité du maximum de n variables aléatoires i.i.d. uniformément distribuées sur $[0,1]$.

Exercice 67

Soient X, Y, Z des variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$. On note M la variable aléatoire obtenue en prenant la valeur médiane entre X, Y et Z. Admet-elle une

densité par rapport à la mesure de Lebesgue ? Le cas échéant, la déterminer.
Indication : calculer la fonction de répartition de M.

Exercice 68

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes, de lois exponentielles de paramètres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$, respectivement. Montrer que $\min(X_1, \ldots, X_n)$ suit une loi exponentielle dont on déterminera le paramètre.

Exercice 69 Loi des écarts

1. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles i.i.d., de loi exponentielle de paramètre 1, où $n \in \mathbb{N}^*$. On note $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ l'échantillon réordonné dans l'ordre croissant. Déterminer la loi jointe de $X_{(1)}, X_{(2)} - X_{(1)}, X_{(3)} - X_{(2)}, \ldots, X_{(n)} - X_{(n-1)}$.
2. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles i.i.d., de loi uniforme sur $[0, 1]$, où $n \in \mathbb{N}^*$. On note $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ l'échantillon réordonné dans l'ordre croissant. Déterminer la loi de chacune des variables suivantes: $X_{(1)}, X_{(2)} - X_{(1)}, X_{(3)} - X_{(2)}, \ldots, X_{(n)} - X_{(n-1)}, 1 - X_{(n)}$. Ces variables sont-elles indépendantes ?

Exercice 70 Projection d'une loi uniforme

Soit X un vecteur aléatoire de loi uniforme sur la boule euclidienne de centre 0 et de rayon $\sqrt{d}$, dans $\mathbb{R}^d$.

1. Déterminer la fonction de répartition de X_1, la première coordonnée de X.
2. En déduire la densité de X_1 par rapport à la mesure de Lebesgue. On note $f_d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cette densité.
3. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ fixé,
$$f_d(t) \xrightarrow[d \to \infty]{} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}.$$
Autrement dit, la loi de X_1 s'approche (dans un sens qui sera rendu précis dans l'exercice 203), en très grande dimension, de la loi normale centrée réduite.

Exercice 71 Lois images

Soient $(E, \mathcal{E})$ et $(F, \mathcal{F})$ deux espaces mesurables, P une mesure de probabilité sur $(E, \mathcal{E})$ et $f : E \to F$ une fonction mesurable. On note $f\#P$ la mesure image de P par f, i.e., pour tout $B \in \mathcal{F}$, $(f\#P)(B) = P(f^{-1}(B))$.

1. Vérifier que $f\#P$ est une mesure de probabilité sur $(F, \mathcal{F})$.
2. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$. Vérifier que la loi P_X de X est simplement donnée par $X\#P$.

3. Déterminer $f\#P$ dans les cas suivants :
   a) $P = \mathcal{U}([0,1])$ et $f(x) = 2x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
   b) $P = \mathcal{U}([0,1])$ et $f(x) = 1 - x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
   c) $P = \mathcal{U}([0,1])$ et $f(x) = ax + b, \quad \forall x \in \mathbb{R}$, où $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$.
   d) $P = \mathcal{N}(0,1)$ et $f(x) = ax + b, \quad \forall x \in \mathbb{R}$, où $a, b \in \mathbb{R}$.
   e) $P = \mathcal{E}xp(\lambda)$ et $f(x) = ax, \quad \forall x \in \mathbb{R}$, où $\lambda, a > 0$.
   f) $P = \mathcal{N}(0,1)$ et $f(x) = 1/x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$.
   g) $P = \mathcal{U}([0,1])$ et $f(x) = x^n, \quad \forall x \in \mathbb{R}$, où $n \in \mathbb{N}$.
   h) $P = \mathcal{U}([0,1])$ et $f(x) = \sqrt{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$.
   i) $P = \mathcal{N}(0,1)$ et $f(x) = x^n, \quad \forall x \in \mathbb{R}$, où $n \in \mathbb{N}$.
   j) $P = \mathcal{N}_2(0, I_2)$ et $f(x,y) = x + y, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.
   k) $P = \mathcal{N}_d(\mu, \Sigma)$ et $f(x) = Ax + b, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$, où $\mu \in \mathbb{R}^d$, Σ est une matrice symétrique réelle, semi-définie positive, $A \in \mathbb{R}^{p \times d}$, $b \in \mathbb{R}^p$, $d, p \in \mathbb{N}^*$.
   l) $P = \mathcal{N}_d(0, I_d)$ et $f(x) = \|x\|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$, où $d \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 72

Dans chaque question, on vous donne une fonction, qui dépend de certains paramètres, et on vous dit que cette fonction est une densité par rapport à la mesure indiquée. En faisant le moins de calculs possible (voire, dans certains cas, aucun calcul, ni même de tête), reconnaître la loi correspondante, en indiquant juste le domaine dans lequel doivent se trouver les paramètres.

1. $f(x) = e^{ax+b}\mathbb{1}_{x \geq 0}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$, avec la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
2. $f(x) = e^{ax^2+bx+c}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$, avec la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
3. $f(x) = \frac{e^{ax+b}}{x!}, \quad \forall x \in \mathbb{N}$, avec la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$.
4. $f(x) = Ca^x, \quad \forall x \in \mathbb{N}$, avec la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$.
5. $f(x) = \frac{Ca^{x+3}}{x!}, \quad \forall x \in \mathbb{N}$, avec la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$.
6. $f(x) = C\mathbb{1}_{3 \leq x \leq 32}, \quad \forall x \in \mathbb{N}$, avec la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$.
7. $f(x) = \frac{C}{ax^2+bx+c}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$, avec la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
8. $f(x) = Ce^{x^\top Ax + b^\top x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$ (A est une matrice et b est un vecteur), avec la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
9. $f(x) = ax + b, \quad \forall x \in \{0,1\}$, avec la mesure de comptage sur $\{0,1\}$.
10. $f(x) = Ca^x, \quad \forall x \in \{0,1\}$, avec la mesure de comptage sur $\{0,1\}$.

Exercice 73 Transport optimal

Soient E et F deux ensembles finis non vides, de cardinaux respectifs m et n, et munis de leurs tribus discrètes. Dans la suite, on notera $a_1, \ldots, a_m$ les éléments de E et $b_1, \ldots, b_n$ les éléments de F.

Soient P et Q deux lois de probabilités sur E et F respectivement. Un couplage de P et Q est une loi sur le produit $E \times F$ dont les marginales sont données par P et Q, i.e., la loi de n'importe quel vecteur aléatoire (X, Y), où X est une variable aléatoire dans E de loi P et Y est une variable aléatoire dans F de loi Q.

1. Rappeler pourquoi P et Q sont entièrement déterminées par la donnée de $m + n$ nombres réels positifs $p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_n$ tels que $p_1 + \ldots + p_m = q_1 + \ldots + q_n = 1$.
2. Soit Π un couplage de P et Q et soit $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ la matrice dont les coefficients sont donnés par $M_{i,j} = \Pi(\{(a_i, b_j)\})$, $i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$.
   a) Vérifier que Π est entièrement déterminée par la matrice $M_{i,j}$.
   b) Vérifier que $M1_n = q$ et $M^\top 1_m = p$, où $1_m = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^m$, $1_n = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$, $p = (p_1, \ldots, p_m)$ et $q = (q_1, \ldots, q_n)$.
   c) Réciproquement, vérifier que toute matrice $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ satisfaisant $M1_n = q$, $M^\top 1_m = p$ et $M_{i,j} \geq 0$ pour tout $i = 1, \ldots, m$ et tout $j = 1, \ldots, n$, permet de représenter un couplage de P et Q.
3. Pour tout $i = 1, \ldots, m$ et $j = 1, \ldots, n$, fixons un nombre réel $c_{i,j} > 0$, pouvant être interprété comme un coût pour effectuer une opération entre a_i et b_j (par exemple, E est un ensemble d'usines et F est un ensemble de distributeurs, et $c_{i,j}$ est un coût de transport depuis l'usine a_i vers le distributeur b_j). On souhaite minimiser le coût moyen associé à un couplage Π de P et Q, c'est-à-dire à trouver un couple de variables aléatoires X et Y, de lois respectives P et Q, dont la loi jointe permet de minimiser le coût moyen défini comme $C(\Pi) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{i,j} P(X = a_i, Y = b_j)$ (par exemple, un bien donné est produit en proportions données par $p_1, \ldots, p_m$ dans chacune des usines, et chaque distributeur doit en recevoir une proportion donnée par $q_1, \ldots, q_n$).
   a) Vérifier qu'on peut écrire $C(\Pi)$ comme $\mathsf{Tr}(C^\top M)$, où M est la matrice associée au couplage Π comme défini dans la question précédente et $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est une matrice qu'on déterminera.
   b) Montrer que les solutions au problème sont les solutions du problème d'optimisation linéaire suivant:

$$\min_{M \in \mathbb{R}^{m \times n}} \begin{cases} \mathsf{Tr}(CM) \\ \text{s.c. } M1_n = q, \\ \quad M^\top 1_m = p, \\ \quad M_{i,j} \geq 0, \forall i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

* Exercice 74 Transport optimal et distance en variation totale

Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable. Etant données deux probabilités P et Q sur $(E, \mathcal{E})$, on définit la distance en variation totale entre P et Q par la quantité $d(P, Q) = \sup_{A \in \mathcal{E}} |P(A) - Q(A)|$.

1. Vérifier que d définit une distance sur l'ensemble des probabilités sur $(E, \mathcal{E})$.
2. Soient P et Q deux probabilités sur $(E, \mathcal{E})$.
   a) Vérifier qu'il existe une mesure σ-finie μ sur $(E, \mathcal{E})$ par rapport à laquelle P et Q admettent toutes deux des densités, qu'on notera p et q dans la suite.
   b) Montrer que $d(P, Q) = \frac{1}{2} \int_E |p(x) - q(x)| \, \mathrm{d}\nu(x)$ *(on pourra procéder en montrant une double inégalité ; pour l'une d'elles, on pourra introduire l'ensemble* $A_0 = \{x \in E : p(x) \geq q(x)\}$, *en justifiant qu'il est bien dans* $\mathcal{E}$*)*.
3. On supposera dans la suite que la diagonale $D = \{(x, x) = x \in E\}$ est un élément de la tribu produit $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$ (proposer un exemple dans lequel ce n'est pas le cas). Fixons de nouveau deux probabilités P et Q sur $(E, \mathcal{E})$. Le but de cette question est de montrer qu'on peut aussi écrire la distance en variation totale entre P et Q comme la solution d'un problème de transport optimal :

$$d(P, Q) = \inf_{\Pi \in \mathcal{C}(P,Q)} \Pi(D^\complement) = \inf_{X \sim P, Y \sim Q} \mathsf{P}(X \neq Y)$$

   où $\mathcal{C}(P, Q)$ est l'ensemble des couplages de P et Q, i.e., l'ensemble des probabilités sur $(E \times E, \mathcal{E} \otimes \mathcal{E})$ dont les marginales sont données par P et Q, et où le deuxième infimum est calculé sur l'ensemble des variables aléatoires X et Y à valeurs dans E définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$, de lois respectives P et Q (vérifier que $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \neq Y(\omega)\} \in \mathcal{A}$).
   Soient X et Y deux variables aléatoires quelconques dans E de lois respectives P et Q.
   a) Vérifier que pour tout $A \in \mathcal{E}$,

$$\mathsf{P}(X \neq Y) \geq P(A) - Q(A).$$

   b) En déduire que quelle que soit la loi jointe de X et Y, $\mathsf{P}(X \neq Y) \geq d(P, Q)$.
   c) Soit $\alpha = d(P, Q)$ et posons $A = \{x \in E : p(x) \geq q(x)\}$.
      i – Vérifier que $\alpha \in [0, 1]$.
      ii – Si $\alpha = 0$, vérifier que $P = Q$ et que le résultat recherché est vrai.
      iii – Si $\alpha = 1$, vérifier que le résultat recherché est vrai, en prenant n'importe quel couplage de P et Q.
      iv – Supposons $\alpha \notin \{0, 1\}$. Vérifier que la fonction $f(x) = \min(p(x), q(x))/(1-\alpha)$ est une densité sur $(E, \mathcal{E})$ par rapport à ν (où on rappelle que p et q sont les densités respectives de P et Q par rapport à une mesure ν).
      v – Soient $g(x) = \frac{p(x)-q(x)}{\alpha} \mathbb{1}_{x \in A}$ et $h(x) = \frac{q(x)-p(x)}{\alpha} \mathbb{1}_{x \notin A}$, pour tout $x \in E$. Montrer que g et h sont des densités par rapport à la mesure ν.
      vi – Soient U, V, W, Z quatre variables aléatoires indépendantes, telles que: U, V, W sont des variables aléatoires dans E admettant pour densités respectives, par rapport à ν, f, g et h, et Z suit la loi de Bernoulli de

paramètre α. Soient $X = (1-Z)U + ZV$ et $Y = (1-Z)U + ZW$. Montrer que X et Y ont pour lois P et Q respectivement et que $P(X \neq Y) = d(P,Q)$.

3.6 Fonctions de répartition

Exercice 75 Rappels de cours

Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle la fonction de répartition de X la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = P(X \leq x)$, pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer, et tracer le graphe de la fonction de répartition de X lorsque X suit la loi :
   a) de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$;
   b) exponentielle de paramètre $\lambda > 0$:
   c) uniforme sur $[0,1]$.
2. Montrer que F est croissante, $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   a) Montrer que $\lim_{y\to x, y<x} F(y) = P(X < x)$ et $\lim_{y\to x, y>x} F(y) = F(x)$.
   b) En déduire que F est càdlàg, i.e., F est continue à droite et admet une limite à gauche en tout point.
   c) En déduire aussi que F est continue en x si et seulement si x n'est pas un atome de X.
4. Montrer que F détermine complètement la loi de X.

Exercice 76 Loi du min, loi du max

1. Soit $n \geq 1$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles i.i.d. Exprimer les fonctions de répartition de $\min(X_1, \ldots, X_n)$ puis de $\max(X_1, \ldots, X_n)$.
2. Supposons que la loi des X_i soit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer la loi de $\min(X_1, \ldots, X_n)$.

* Exercice 77 Caractérisation des fonctions de répartition

Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante, càdlàg, telle que $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$. Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe une variable aléatoire réelle dont F est la fonction de répartition.

1. Pour tout $t \in]0,1[$, on définit $F^-(t) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq t\}$.
   a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $t \in]0,1[$,

$$F(x) \geq t \iff x \geq F^-(t).$$

b) Si F est strictement croissante et continue, comment appelle-t-on la fonction F^- ?

Dans la suite, on admet que F^- est une fonction mesurable (on pourra éventuellement le démontrer).

2. Soit U une variable uniforme sur $[0,1]$. On définit

$$X = \begin{cases} F^-(U) \text{ si } 0 < U < 1 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

a) Montrer que X est une variable aléatoire.
b) Montrer que F est la fonction de répartition de X.

* Exercice 78 Fonctions absolument continues

Une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite absolument continue s'il existe une fonction mesurable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable sur tout compact par rapport à la mesure de Lebesgue, telle que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$,

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dans ce cas, on dit que la fonction f est une *dérivée au sens faible* de F.

1. Montrer que si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est absolument continue, et si f et g sont deux dérivées au sens faible de F, alors $f = g$ λ-presque partout, où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On s'autorise donc à parler, par abus de langage, de *la* dérivée au sens faible de F.
2. Montrer que si F et G sont deux fonctions absolument continues, alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda F + \mu G$ est absolument continue.
3. Montrer que si F et G sont deux fonctions absolument continues, alors FG est absolument continue *(on pourra montrer que $Fg + fG$ est une dérivée au sens faible de FG, où f et f sont des dérivées au sens faible de F et G respectivement, en justifiant rigoureusement tous les calculs : notamment, justifier que $Fg + fG$ est bien mesurable et intégrable sur tout compact).*
4. Vérifier qu'une fonction absolument continue est nécessairement continue sur $\mathbb{R}$.
5. Proposer un exemple de fonction continue qui n'est pas absolument continue.
6. Montrer qu'une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ est absolument continue et que sa dérivée est une dérivée au sens faible.
7. Proposer un exemple de fonction absolument continue qui n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

8. Montrer qu'une fonction continue et C^1 par morceaux est absolument continue *(on rappelle qu'une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite C^1 par morceaux si et seulement si pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, il existe un entier $n \geq 1$ et des nombres $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$ tels que sur chaque (a_{i-1}, a_i), F coïncide avec une fonction qui est C^1 sur $[a_{i-1}, a_i]$).*
9. Proposer un exemple de fonction absolument continue qui n'est pas C^1 par morceaux.
10. Montrer que toute fonction lipschitzienne est absolument continue.
11. Proposer un exemple de fonction absolument continue qui n'est pas lipshitzienne.
12. Soit X une variable aléatoire réelle et soit F sa fonction de répartition.
    a) Vérifier que si X admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue, alors F est absolument continue et sa dérivée au sens faible est la densité de X.
    b) Réciproquement, montrer que si F est absolument continue, alors X admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue, donnée par la dérivée au sens faible de F.

Exercice 79 Définition et propriétés des quantiles

Soit X une variable aléatoire réelle et $\alpha \in (0, 1)$. On appelle quantile d'ordre α de X tout nombre réel q satisfaisant $P(X \leq q) \geq \alpha$ et $P(X \geq q) \geq 1 - \alpha$. Lorsque $\alpha = 1/2$, on parle de *médiane*.

1. Déterminer l'ensemble des quantiles d'ordre α ($\alpha \in (0, 1)$ est fixé) de X lorsque X suit la loi:
    a) Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$ (il faudra distinguer plusieurs cas suivant la valeur de p);
    b) Uniforme sur $[0, 1]$;
    c) Unforme sur $[a, b]$ où $a < b$ sont deux nombres réels;
    d) Exponentielle de paramètre $\lambda \in (0, 1)$;
    e) Géométrique de paramètre $p \in (0, 1)$.
2. Montrer que si la loi de X est symétrique (i.e., $-X$ et X ont la même loi), alors 0 est une médiane de X. Est-ce nécessairement la seule ?
3. Montrer que l'ensemble des quantiles d'ordre α de X est toujours un intervalle fermé, borné et non vide.
4. Soit I l'ensemble des quantiles d'ordre α de X. Montrer que $P(X \in \mathring{I}) = 0$, où $\mathring{I}$ désigne l'intérieur de I.
5. Supposons que X admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue, et que cette densité est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
    a) Vérifier que la fonction de répartition de X est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire que le dans ce cas-là, le quantile d'ordre α de X est unique, et qu'il est donné par $F^{-1}(\alpha)$, où F^{-1} est la bijection réciproque de la fonction de répartition F de X.

6. Supposons que X suit la loi normale centrée réduite. On note Φ sa fonction de répartition.
   a) Vérifier que Φ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle ouvert $(0, 1)$.
   b) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Phi(t) = 1 - \Phi(-t)$.
   c) Pour tout $\beta \in (0, 1)$, on note q_β l'unique quantile d'ordre β de X. Déduire des questions précédentes que $q_{1-\alpha} = -q_\alpha$.
   d) Déduire que si $\alpha \in (0, 1)$, alors $P(|X| > q_{1-\alpha/2}) = \alpha$.
   e) Soit Y une variable aléatoire de loi normale de paramètre (μ, σ^2), où $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 > 0$. Déterminer le quantile d'ordre α de Y en fonction des quantiles de X, de μ et de σ.

Exercice 80

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles i.i.d. Soit N le nombre de ces variables qui prennent des valeurs strictement positives, i.e.,

$$N = \mathsf{card}\left(\{i = 1, \ldots, n : X_i > 0\}\right).$$

Déterminer la loi de N à l'aide de la fonction de répartition de X_1.

Exercice 81 Une loi sans mémoire

Soit X une variable aléatoire réelle positive satisfaisant:

- $\forall t \geq 0, P(X > t) > 0$;
- $\forall s, t \geq 0, P(X > t + s | X > t) = P(X > s)$.

1. Donner une interprétation à la seconde hypothèse.
2. Soit F la fonction de répartition de X, et soit $G = 1 - F$. Montrer que pour tout $s, t \geq 0$,
$$G(t + s) = G(t)G(s).$$
3. Posons $a = G(1)$.
   a) Déterminer $G(0)$.
   b) Montrer que $a > 0$.
   c) Déterminer la valeur de $G(n)$, pour tout entier $n \geq 0$, en fonction de a.
   d) En déduire la valeur de $G(r)$, pour tout rationnel $r \geq 0$.
   e) En déduire la valeur de $G(t)$, pour tout réel $t \geq 0$, en fonction de a *(attention : on ne sait pas si G est continue - en revanche, on sait qu'elle est continue à droite).*

f) Déterminer la valeur de $G(t)$ pour tout réel $t < 0$.

4. En déduire F, ainsi que la loi de X.

4 Espérances

4.1 Espérance de variables aléatoires

Exercice 82 Calcul d'espérances

Calculer l'espérance et la variance, lorsqu'elles existent (justifier leurs existences ou non-existences), d'une variable aléatoire réelle suivant la loi:

1. Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$;
2. Binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$;
3. Poisson de paramètre $\lambda > 0$;
4. Géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre $p \in]0, 1[$;
5. Exponentielle de paramètre $\lambda > 0$;
6. Uniforme sur $[a, b]$, où $a < b$;
7. Gaussienne de paramètres $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 > 0$;
8. Cauchy de paramètres $m \in \mathbb{R}$ et $a > 0$ (i.e., admettant la densité donnée par $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{(x-m)^2 + a^2}$, $x \in \mathbb{R}$, par rapport à la mesure de Lebesgue).

Exercice 83

Vérifier les propriétés suivantes de l'espérance :

- Soit X un vecteur aléatoire réel dans $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) dont on note $X_1, \ldots, X_d$ les coordonnées. Alors X admet une espérance si et seulement si chaque X_j, $j = 1, \ldots, d$ admet une espérance, et $\mathbb{E}[X]$ est le vecteur dont les coordonnées sont les $\mathbb{E}[X_j]$, $j = 1, \ldots, n$.
- Linéarité : $\mathbb{E}[\lambda X + \mu Y] = \lambda \mathbb{E}[X] + \mu \mathbb{E}[Y]$, où X, Y sont des vecteurs aléatoires réels admettant une espérance, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- Positivité : si X est une variable aléatoire réelle telle que $X \geq 0$ p.s., alors $\mathbb{E}[X] \geq 0$. Si, de plus, $\mathbb{E}[X] = 0$, alors $X = 0$ p.s.

- Inégalité triangulaire (1) : si X est une variable aléatoire réelle admettant une espérance, alors $|\mathbb{E}[X]| \leq \mathbb{E}[|X|]$.

- Inégalité triangulaire (2) : si X est un vecteur aléatoire réel admettant une espérance, alors $\|\mathbb{E}[X]\| \leq \mathbb{E}[\|X\|]$.

Exercice 84 Linéarité de l'espérance et vecteurs aléatoires

1. Vérifier que si X est un vecteur aléatoire réel de taille $d \geq 1$ intégrable et $A \in \mathbb{R}^{p \times d}$ $(p, d \geq 1)$, alors AX est intégrable et $\mathbb{E}[AX] = A\mathbb{E}[X]$.
2. Vérifier que si M est une matrice aléatoire dans $\mathbb{R}^{p \times q}$ (c'est à dire, une fonction mesurable de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dans $(\mathbb{R}^{p \times q}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{p \times q}))$ ou, autrement dit, une matrice dont chaque coefficient est une variable aléatoire réelle) et si $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$ et $B \in \mathbb{R}^{q \times n}$ sont des matrices données (avec $m, n, p, q \geq 1$), alors $\mathbb{E}[AMB] = A\mathbb{E}[M]B$.
3. Vérifier que si M est une matrice aléatoire dans $\mathbb{R}^{p \times q}$ (avec $p, q \geq 1$), alors $\mathbb{E}[M^\top] = \mathbb{E}[M]^\top$.
4. Soit M une matrice aléatoire dans $\mathbb{R}^{d \times d}$. Vérifier que $\mathbb{E}[\mathsf{Tr}(M)] = \mathsf{Tr}(\mathbb{E}[M])$.
5. Soit X un vecteur aléatoire réel de taille $d \geq 1$ de carré intégrable, et soient μ son espérance et Σ sa matrice de variance-covariance.
   a) Rappeler pourquoi $\Sigma = \mathbb{E}[(X - \mu)(X - \mu)^\top]$.
   b) Montrer que $\Sigma = \mathbb{E}[XX^\top] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X]^\top$.
   c) En déduire que $\mathbb{E}[XX^\top] = \Sigma + \mu\mu^\top$.
   d) Démontrer que pour toute matrice $A \in \mathbb{R}^{p \times d}$, où $p \geq 1$,

$$\mathbb{E}[\|AX\|_2^2] = \|A\mu\|_2^2 + \mathsf{Tr}(A\Sigma A^\top)$$

   (on évitera de travailler avec les coefficients des matrices, et on s'efforcera d'utiliser les questions précédentes, en remarquant, pour commencer, que $\|AX\|_2^2 = \mathsf{Tr}(AXX^\top A^\top)$).

Exercice 85

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. Déterminer l'espérance et la variance de $\min(X_1, \ldots, X_n)$.
2. Sans faire de calculs supplémentaires, en déduire l'espérance et la variance de $\max(X_1, \ldots, X_n)$ *(Indication : vérifier que $1 - X_1, \ldots, 1 - X_n$ sont i.i.d. de loi uniforme sur $[0, 1]$).*

Exercice 86

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité est $A \in \mathcal{A}$. Soit $X = \mathbb{1}_A$.

1. Vérifier que X est bien une variable aléatoire réelle. Quelle est sa loi ?

2. Vérifier que $\mathbb{E}[X] = P(A)$.

Exercice 87 Une formule pour la variance

1. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles de carré intégrable. Montrer que

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \frac{1}{2}\mathbb{E}[(X - X')(Y - Y')]$$

où (X', Y') est un vecteur aléatoire indépendant et de même loi que (X, Y).
2. Conclure qu'en particulier, pour toute variable aléatoire réelle X de carré intégrable,

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{2}\mathbb{E}[(X - X')^2],$$

où X' est une variable aléatoire indépendante de X et de même loi que X.

Exercice 88 Inégalité d'association de Chebychev

Soit X une variable aléatoire réelle et f et g deux fonctions croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(X)$ et $g(X)$ sont de carré intégrable. On souhaite montrer qu'alors, la covariance entre $f(X)$ et $g(X)$ est positive.

1. Soit X' une variable aléatoire réelle indépendante de X et de même loi que celle-ci. Montrer que $(f(X) - f(X'))(g(X) - g(X'))$ est une variable aléatoire positive et intégrable.
2. Conclure.

* Exercice 89 Une preuve alternative de la formule de Poincaré

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité, $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$.

1. Vérifier (sans récurrence) que

$$\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \mathcal{P}_k(\{1,2,\ldots,n\})} \mathbb{1}_{\bigcap_{i \in I} A_i},$$

où, pour tout $k = 1, \ldots, n$, $\mathcal{P}_k(\{1, 2, \ldots, n\})$ est l'ensemble des parties de $\{1, 2, \ldots, n\}$ qui continennent exactement k éléments.
2. Conclure, en prenant l'espérance.

4.2 Espérances et convexité

* Exercice 90 Une preuve de l'inégalité Jensen

Soit X un vecteur aléatoire réel dans $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) et $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. On suppose que X et $f(X)$ admettent une espérance.

On note A l'ensemble des couples $(u, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $u^\top x + t \leq f(x)$.

1. Montrer que $A \neq \emptyset$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,
$$f(x) = \sup\{u^\top x + t : (u, v) \in A\}.$$
3. En déduire que $\mathbb{E}[f(X)] \geq f(\mathbb{E}[X])$.

Exercice 91 Une seconde preuve de l'inégalité Jensen, et cas d'égalité

Soit X un vecteur aléatoire réel dans $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) et $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. On suppose que X et $f(X)$ admettent une espérance. Posons $m = \mathbb{E}[X]$.

1. Montrer l'existence d'un vecteur $u \in \mathbb{R}^d$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,
$$f(x) \geq f(m) + u^\top (x - m)$$
(un tel vecteur u est appelé *sous-gradient* de f en m).
2. En déduire l'inégalité de Jensen.
3. Supposons f strictement convexe.
   a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{m\}$,
   $$f(x) > f(m) + u^\top (x - m).$$
   b) En déduire que si $\mathbb{E}[f(X)] = f(\mathbb{E}[X])$, alors $X = m$ p.s.
   c) Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que $\mathbb{E}[X^{-1}] > \lambda$.

Exercice 92 Support convexe

Soit $C \subseteq \mathbb{R}^d$ un ensemble convexe et soit X une variable aléatoire dans $\mathbb{R}^d$ intégrable telle que $X \in C$ presque sûrement.

1. Montrer que si $\mathbb{E}[X] \in \partial C$, alors $X \in \partial C$ presque sûrement.
2. Montrer que si de plus $\mathbb{E}[X]$ est un point exposé de C, alors $X = \mathbb{E}[X]$ presque sûrement.

Exercice 93 Inégalité de Hölder

Soient p, q deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles telles que $X \in L^p(P)$ et $Y \in L^q(P)$.

1. Vérifier que $p, q > 1$.
2. Vérifier que pour tout réels positifs a, b et pour tout $\lambda > 0$,

$$ab \leq \frac{\lambda^p a^p}{p} + \frac{b^q}{\lambda^q q}.$$

3. En déduire que $XY \in L^1(P)$ et que

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq \frac{\lambda^p \mathbb{E}[|X|^p]}{p} + \frac{\mathbb{E}[|Y|^q]}{\lambda^q q},$$

   quel que soit $\lambda > 0$.
4. En déduire l'inégalité de Hölder :

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq \mathbb{E}[|X|^p]^{1/p} \mathbb{E}[|Y|^q]^{1/q}$$

   (indication : on optimisera l'inégalité de la question précédente en $\lambda > 0$).
5. Retrouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz comme cas particulier de l'inégalité de Hölder.

* Exercice 94 Une généralisation de l'inégalité de Hölder

Soient $p_1, \ldots, p_n$ des nombres réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_1} = 1$ ($n \geq 2$) et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles satisfaisant $X_i \in L^{p_i}(P)$, pour tout $i = 1, \ldots, n$. Montrer que $X_1 \ldots X_n \in L^1(P)$ et que

$$\mathbb{E}[|X_1 \ldots X_n|] \leq \mathbb{E}[|X_1|^{p_1}]^{1/p_1} \ldots \mathbb{E}[|X_n|^{p_n}]^{1/p_n}$$

(on pourra démontrer ce résultat par récurrence).

* Exercice 95 Inégalité de Minkowski

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles et $p \geq 1$ un réel quelconque. On suppose que $X, Y \in L^p(P)$.

1. Montrer que $X + Y \in L^p(P)$.
2. Vérifier que $|X||X+Y|^{p-1}$ et $|Y||X+Y|^{p-1}$ admettent une espérance, et que

$$\mathbb{E}[|X+Y|^p] \leq \mathbb{E}[|X||X+Y|^{p-1}] + \mathbb{E}[|Y||X+Y|^{p-1}].$$

3. A l'aide de l'inégalité de Hölder, en déduire l'inégalité de Minkowski :

$$\mathbb{E}[|X+Y|^p]^{1/p} \leq \mathbb{E}[|X|^p]^{1/p} + \mathbb{E}[|Y|^p]^{1/p}.$$

* Exercice 96 Définition variationnelle des médianes

Soit X une variable aléatoire réelle admettant une espérance.

1. Vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|X - t|$ admet aussi une espérance.
2. Soit $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\Phi(t) = \mathbb{E}[|X - t|]$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Vérifier que Φ est une fonction convexe et coercive (i.e., $\Phi(t) \xrightarrow[t \to \pm\infty]{} \infty$).
3. En déduire que Φ admet au moins un minimiseur. Le but de l'exercice est de montrer que les minimiseurs de Φ sont exactement les médianes de X.
4. Soit t^* une médiane de X. On va démontrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Phi(t) - \Phi(t^*) \geq 0$, avec égalité si et seulement si t est une médiane de X.
   a) Vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on peut écrire
   $$\begin{aligned} \Phi(t) &= 2\mathbb{E}[(X - t)\mathbb{1}_{X>t}] - \mathbb{E}[X] + t \\ &= \mathbb{E}[X] - t - 2\mathbb{E}[(X - t)\mathbb{1}_{X<t}]. \end{aligned}$$
   b) Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $P(X \geq t) < 1/2$.
      i – Vérifier que $t > t^*$ et que
      $$\Phi(t) - \Phi(t^*) = (t - t^*)\,(1 - 2P(X > t)) - 2\mathbb{E}[(X - t^*)\mathbb{1}_{t^*<X\leq t}].$$
      ii – En déduire que
      $$\Phi(t) - \Phi(t^*) \geq (t - t^*)\,(1 - 2P(X > t^*))$$
      et que $\Phi(t) > \Phi(t^*)$.
   c) Montrer que, similairement, si $t \in \mathbb{R}$ est tel que $P(X \leq t) < 1/2$, alors $\Phi(t) > \Phi(t^*)$.
   d) Déduire des questions précédentes que tout minimiseur de Φ est nécessairement une médiane de X.
   e) Vérifier que si t, t' sont deux médianes de X, alors $\Phi(t) = \Phi(t')$ *(on pourra démontrer une double inégalité)*.
   f) Conclure.
5. Dans cette question, on ne suppose plus que X admet une espérance.
   a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|X - t| - |X|$ admet une espérance.
   b) En adaptant les raisonnements précédents (mais en tenant rigoureusement compte des questions d'intégrabilité), montrer que l'ensemble des médianes de X coïncide avec l'ensemble des minimiseurs de la fonction $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\Psi(t) = \mathbb{E}[|X - t| - |X|]$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

* Exercice 97 Définition variationnelle des quantiles

Soit X une variable aléatoire réelle et $\alpha \in (0,1)$. Soit $\ell_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\ell_\alpha(t) = \alpha t$ si $t \geq 0$, $\ell_\alpha(t) = (\alpha - 1)t$ si $t < 0$.

1. Vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire $\ell_\alpha(X - t) - \ell_\alpha(X)$ admet une espérance.
2. Pour $t \in \mathbb{R}$, soit $\Phi_\alpha(t) = \mathbb{E}[\ell_\alpha(X - t) - \ell_\alpha(X)]$. En adaptant vos réponses de l'exercice précédent, montrer que l'ensemble des minimiseurs de Φ_α coïncide avec l'ensemble des quantiles d'ordre α de X.

4.3 Caractérisation de la loi et de l'indépendance à l'aide de l'espérance et des fonctions tests

Exercice 98

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité et à valeurs dans un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) X et Y ont la même loi

(ii) Pour toute fonction positive et mesurable $f : E \to \mathbb{R}$, $\mathbb{E}[f(X)] = \mathbb{E}[f(Y)]$

(iii) Pour toute fonction mesurable et bornée $f : E \to \mathbb{R}$, $\mathbb{E}[f(X)] = \mathbb{E}[f(Y)]$

(iv) Pour toute fonction mesurable $f : E \to [-1, 1]$, $\mathbb{E}[f(X)] = \mathbb{E}[f(Y)]$.

* Exercice 99 Distances en probabilités définies à l'aide d'espérances

Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable et soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$. Etant données deux probabilités P et Q sur $(E, \mathcal{E})$, on définit $\mathrm{d}(P, Q) = \sup_{f \in \mathcal{F}} |\mathbb{E}[f(X)] - \mathbb{E}[f(Y)]|$, où $X \sim P$ et $Y \sim Q$.

1. Vérifier que la définition de $\mathrm{d}(P, Q)$ ne dépend pas du choix du couple de variables aléatoires X et Y de lois respectives P et Q.
2. Vérifier que d est symétrique et qu'elle satisfait l'inégalité triangulaire.
3. Supposons que $\mathcal{F} = \{\mathbb{1}_{\cdot \in A} : A \in \mathcal{E}\}$. Vérifier qu'alors, d définit une distance sur l'ensemble des probabilités sur $(E, \mathcal{E})$.
4. Supposons que $\mathcal{F}$ est l'ensemble de toutes les fonctions mesurables de E dans $[-1, 1]$. Vérifier qu'alors, d définit aussi une distance sur l'ensemble des probabilités sur $(E, \mathcal{E})$. Vérifier qu'on obtient la même distance que dans la question précédente. On pourra aussi vérifier qu'on obtient la distance en variation totale, étudiée dans l'exercice 74.

5. Supposons que $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, où $d \geq 1$. Dans chacun des cas suivants, d définit-elle une distance ?
   a) $d = 1$ et $\mathcal{F} = \{\mathbb{1}_{\cdot \leq t} : t \in \mathbb{R}\}$;
   b) $\mathcal{F} = \{e^{iu^\top \cdot} : u \in \mathbb{R}^d\}$ (dans ce cas, $|\cdot|$ est à entendre comme module, dans la définition de d) ;
   c) $\mathcal{F} = \{u^\top \cdot : u \in \mathbb{R}^d, \|u = 1\|\}$;
   d) $\mathcal{F} = \{f(u^\top \cdot) : u \in \mathbb{R}^d, f : \mathbb{R}^d \to [-1, 1] \text{ mesurable}\}$;
   e) $\mathcal{F}$ est la classe de toutes les fonctions 1-lipschitziennes de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ (d est alors appelée *distance de Wasserstein-1*, très utilisée en transport optimal).

Exercice 100

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles i.i.d. de loi normale centrée réduite. Montrer que $X^2 + Y^2$ suit une loi exponentielle dont on déterminera le paramètre.

Exercice 101

Soit X une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et soit Z une variable de Bernoulli, de paramètre $1/2$, indépendante de X. Montrer que $(2Z - 1)X$ est continue et calculer sa densité.

Exercice 102

Soit X une variable aléatoire gaussienne centrée réduite (i.e., de paramètres 0 et 1) et soit Z une variable de Bernoulli, de paramètre $1/2$, indépendante de X. Montrer que $(2Z - 1)X$ a la même loi que X. Ces deux variables sont-elles indépendantes ?

Exercice 103

Soit X une variable aléatoire réelle continue, dont la densité est donnée par $f(x) = Ce^{-\lambda|x|}, x \in \mathbb{R}$, où $\lambda > 0$ et C est une constante de normalisation.

1. Calculer la valeur de C en fonction de λ.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $s(X)$ le signe de x: $s(x) = 1$ si $x > 0$, $s(0) = 0$ et $s(x) = -1$ si $x < 0$.
   a) Calculer les lois de $s(X)$ et de $|X|$.
   b) Démontrer que $s(X)$ et $|X|$ sont indépendantes.
   c) Montrer que, plus généralement, si Y est une variable aléatoire réelle admettant une densité paire par rapport à la mesure de Lebesgue, alors $s(Y)$ et $|Y|$ sont indépendantes.

Exercice 104

Soit X une variable aléatoire géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre $p \in (0, 1)$ (i.e., pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = (1 - p)^k p$) et Y une variable aléatoire exponentielle de paramètre

$\lambda > 0$, indépendante de X. Vérifier que la variable aléatoire $X + Y$ est continue et déterminer sa densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

Exercice 105

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes normales centrées réduites. Montrer que $X + Y$ et $X - Y$ sont indépendantes.

(Réciproquement, on pourrait montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires réelles i.i.d. telles que $X+Y$ et $X-Y$ sont indépendantes, alors X et Y sont nécessairement gaussiennes !)

Exercice 106

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles i.i.d. de loi exponentielle. Montrer que $\min(X, Y)$ et $|X - Y|$ sont indépendantes.

(Réciproquement, on pourrait montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires réelles i.i.d., continues et positives p.s., telles que $\min(X, Y)$ et $|X-Y|$ sont indépendantes, alors X et Y suivent nécessairement une loi exponentielle !)

Exercice 107

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles i.i.d., admettant une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue. Soient $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$.

1. Montrer que U et V admettent une densité jointe par rapport à la mesure de Lebesgue, et calculer les densités marginales de U et V.
2. U et V sont-elles indépendantes ? On justifiera rigoureusement la réponse.

Exercice 108

Soit $n \geq 1$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles i.i.d. exponentielles de paramètre 1. On pose

$$Y_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i \quad \text{ et } Z_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{i}.$$

1. Montrer par récurrence que Y_n et Z_n ont la même loi.
2. En déduire que $\dfrac{\mathbb{E}[Y_n]}{\log n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$.
3. Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires réelles i.i.d. exponentielles de paramètre $\lambda > 0$, quelle est la limite de $\dfrac{\mathbb{E}\left[\max_{1 \leq i \leq n} X_i\right]}{\log n}$?

Exercice 109 Echantillon réordonné et statistiques d'ordre

Soit $n \geq 1$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles i.i.d. admettant une densité. On réordonne $X_1, \ldots, X_n$ dans l'ordre croissant, et on note $Y_1, \ldots, Y_n$ la liste réordonnée.

Par exemple, $Y_1 = \min(X_1, \ldots, X_n)$, Y_2 est le second plus petit de $X_1, \ldots, X_n$ et $Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Montrer que $X_1, \ldots, X_n$ sont deux à deux distincts, presque sûrement.
2. $Y_1, \ldots, Y_n$ sont-elles indépendantes ?
3. Pour $k = 1, \ldots, n$, déterminer la loi de Y_k.
4. Déterminer la loi jointe de $Y_1, \ldots, Y_n$ à l'aide de la densité et de la fonction de répartition des X_i.
5. Pour $i = 1, \ldots, n$, montrer que presque sûrement, il existe un unique $R_i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $X_i = Y_{R_i}$.
   a) Pour $i = 1, \ldots, n$, déterminer la loi de R_i.
   b) Déterminer la loi jointe de $R_1, \ldots, R_n$.

4.4 Moments de variables aléatoires réelles

Exercice 110

Soit X une variable aléatoire réelle. Montrer que pour tous rels $p, q \geq 1$ tels que $p \leq q$, l'existence d'un moment d'ordre q pour X implique l'existence d'un moment d'ordre p et, le cas échéant,

$$\mathbb{E}[|X|^p]^{1/p} \leq \mathbb{E}[|X|^q]^{1/q}$$

(on pourra obtenir ce résultat à l'aide de l'inégalité de Jensen ou de l'inégalité de Hölder).

Exercice 111

Soit X une variable aléatoire réelle et $p \geq 1$. Montrer que X admet un moment d'ordre p si et seulement si $X - a$ admet un moment d'ordre p, quel que soit $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 112

Soit X une variable aléatoire réelle. Dans chacun de ces cas, calculer $\mathbb{E}[|X|^k]$, pour tout entier $k \geq 1$, et commenter sur la manière dont cette quantité évolue avec k.

1. $X \sim \mathrm{Ber}(p)$, où $p \in [0, 1]$;
2. $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, où $\lambda > 0$;
3. $X \sim \mathcal{U}([0, 1])$;
4. $X \sim \mathcal{U}([-1, 1])$;
5. $X \sim \mathcal{U}([0, 2])$;
6. $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ (on établira une formule de récurrence).

Exercice 113 Définition de la covariance au-delà des v.a. de carré intégrable

1. Vérifier que si X est une variable aléatoire réelle intégrable et Y est une variable aléatoire réelle bornée presque sûrement, alors on peut définir la covariance de X et Y.
2. A partir de la question précédente, si X est une variable aléatoire réelle intégrable, déterminer $\operatorname{cov}(X, 1)$.
3. Soient $p, q > 1$ des réels conjugués, i.e., satisfaisant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que si $X \in L^p(P)$ et $Y \in L^q(P)$, alors on peut définir la covariance de X et de Y.

Exercice 114 Linéarité de l'espérance, version matricielle (1)

Soit X un vecteur aléatoire réel de taille $d \geq 1$, et $A \in \mathbb{R}^{p\times d}$ où $p \geq 1$ est un entier.

1. Vérifier que X est intégrable si et seulement si toutes ses coordonnées le sont.
2. Supposons X intégrable. Montrer que AX est intégrable et que $\mathbb{E}[AX] = A\mathbb{E}[X]$.

Exercice 115 Linéarité de l'espérance, version matricielle (2)

On appelle une matrice aléatoire réelle de taille $p \times q$, où $p, q \geq 1$, une fonction mesurable d'un espace de probabilité à valeurs dans $\mathbb{R}^{p\times q}$. Autrement dit, une matrice aléatoire réelle est une matrice dont chaque coefficient est une variable aléatoire réelle.

1. Soit X une matrice aléatoire réelle de taille $p \times q$.
   a) Vérifier que pour toute norme $\|\cdot\|$ sur l'espace des matrices réelles de taille $p \times q$, $\|X\|$ est une variable aléatoire réelle.
   b) On dit que X est intégrable si et seulement si $\|X\|$ est intégrable : montrer que cette définition ne dépend pas du choix de la norme $\|\cdot\|$.
   c) Montrer que X est intégrable si et seulement si tous ses coefficients le sont.
   d) Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times p}$, où $n \geq 1$, une matrice quelconque. Montrer que si X est intégrable, alors AX est intégrable.
2. Soit X une matrice aléatoire réelle de taille $p \times q$. Si X est intégrable, on appelle l'espérance de X, notée $\mathbb{E}[X]$, la matrice de $\mathbb{R}^{p\times q}$ dont les coefficients sont les espérances des coefficients correspondants de X. Dans la suite, on suppose que X est intégrable.
   a) Vérifier que $X^\top$ est intégrable et montrer que $\mathbb{E}[X^\top] = \mathbb{E}[X]^\top$.
   b) Montrer que pour toutes matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times p}$ et $B \in \mathbb{R}^{q\times r}$ $(n, r \geq 1)$, $\mathbb{E}[AXB] = A\mathbb{E}[X]B$.
   c) Plus généralement, montrer que pour toute application linéaire $\phi : \mathbb{R}^{p\times q} \to \mathbb{R}^{n\times r}$, où $n, r \geq 1$ sont des entiers, $\phi(X)$ est une matrice aléatoire intégrable, et $\mathbb{E}[\phi(X)] = \phi(\mathbb{E}[X])$.
   d) En déduire que si Y est un vecteur aléatoire réel de taille $d \geq 1$, intégrable, alors pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, $\mathbb{E}[u^\top Y] = u^\top\mathbb{E}[Y]$.
3. Soit X un vecteur aléatoire réel de taille d de carré intégrable.
   a) Vérifier que la matrice aléatoire $XX^\top$ est intégrable.

b) Pour tout vecteur aléatoire réel Y de taille $p \geq 1$, de carré intégrable, on définit la matrice de variance covariance de Y, notée $\text{cov}(Y)$, comme la matrice $\text{cov}(Y) = \mathbb{E}[YY^\top] - \mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[Y]^\top \in \mathbb{R}^{p\times p}$. A l'aide des questions précédentes, montrer que $\text{cov}(AX) = A\text{cov}(X)A^\top$, pour toute matrice $A \in \mathbb{R}^{p\times d}$.

Exercice 116 Matrice de variance-covariance

Soit X un vecteur aléatoire réel de taille $d \geq 1$, dont on note $X_1, \ldots, X_d$ les coordonnées.

1. Vérifier que $X \in L^2(P)$ (i.e., $\|X\|^2$ admet une espérance) si et seulement si $X_i \in L^2(P)$ pour chaque $i = 1, \ldots, d$.
2. On suppose, dans la suite, que $X \in L^2(P)$ et on définit la matrice $\Sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$ en posant
$$\Sigma_{i,j} = \text{cov}(X_i, X_j)$$
pour tous $i, j = 1, \ldots, d$. On appelle cette matrice la *matrice de variance-covariance du vecteur aléatoire X*.
   a) Vérifier que Σ est bien définie, et qu'elle est symétrique.
   b) Vérifier que
   $$\Sigma = \mathbb{E}[XX^\top] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X]^\top = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])(X - \mathbb{E}[X])^\top\right]$$
   (où l'espérance d'une matrice aléatoire est définie en calculant l'espérance de chacun de ses coefficients).
   c) Soit $u \in \mathbb{R}^d$ un vecteur quelconque. Montrer que $\text{Var}(u^\top X) = u^\top \Sigma u$.
   d) En déduire que Σ est semi-définie positive.
   e) En déduire aussi que Σ est singulière (i.e., non inversible) si et seulement s'il existe un hyperplan affine de $\mathbb{R}^d$ contenant X presque sûrement.
   f) En particulier, montrer que si Σ est singulière, alors X n'admet pas de densité par rapport à la mesure de Lebesgue. La réciproque est-elle vraie ?
   g) Montrer que $\mathbb{E}[\|X\|^2] = \|\mathbb{E}[X]\|^2 + \text{Tr}(\Sigma)$.
   h) Pour toute matrice $A \in \mathbb{R}^{p\times d}$ ($p \geq 1$), vérifier que $AX \in L^2(P)$ et déterminer sa matrice de variance-covariance à l'aide de A et Σ.
   i) Montrer que pour toute matrice $A \in \mathbb{R}^{p\times d}$ ($p \geq 1$), $\mathbb{E}[\|AX\|^2] = \|A\mu\|_2^2 + \mathsf{Tr}(A\Sigma A^\top)$, où $\mu = \mathbb{E}[X]$.

(Dans les trois questions précédentes, on évitera de travailler avec les coefficients des matrices. On pourra remarquer, par exemple, que $\|AX\|_2^2 = \mathsf{Tr}(AXX^\top A^\top)$, et utiliser la linéarité de l'espérance dans sa forme matricielle).

Exercice 117 Une inégalité de Cauchy-Schwarz pour les matrices aléatoires (1)

Soit X une matrice aléatoire réelle de taille $p \times q$. On dit que X est de carré intégrable si et seulement si $\|X\|^2$ est intégrable, où $\|\cdot\|$ est une norme quelconque sur $\mathbb{R}^{p\times d}$.

1. Vérifier que cette définition ne dépend pas du choix de la norme considérée.
2. Montrer que X est de carré intégrable si et seulement si tous ses coefficients le sont.
3. Supposons X de carré intégrable.
   a) Montrer qu'alors, $XX^\top$ est intégrable.
   b) Montrer l'inégalité suivante : $\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X]^\top \preceq \mathbb{E}[XX^\top]$, au sens de l'ordre de Loewner pour les matrices symétriques réelles (i.e., si A et B sont deux matrices symétriques de taille p, on dit que $A \preceq B$ si et seulement si $B - A$ est semi-définie positive).

* Exercice 118 Une inégalité de Cauchy-Schwarz pour les matrices aléatoires (2)

Soient X et Y deux vecteurs aléatoires réels de taille d ($d \geq 1$) de carré intégrable.

1. Montrer que $\mathbb{E}[XX^\top]$, $\mathbb{E}[YY^\top]$ et $\mathbb{E}[XY^\top]$ sont bien définies, et que $\mathbb{E}[XY^\top]$ et $\mathbb{E}[YX^\top]$ sont les matrices transposées l'une de l'autre.
   Dans toute la suite de l'exercice, on supposera que $\mathbb{E}[YY^\top]$ est inversible, et on souhaite déontrer l'inégalité suivante:
   $$\mathbb{E}[XY^\top]\mathbb{E}[YY^\top]^{-1}\mathbb{E}[YX^\top] \preceq \mathbb{E}[XX^\top]$$
   au sens de l'ordre de Loewner pour les matrices symétriques réelles.
2. Vérifier l'inégalité dans le cas où $d = 1$.
3. Soit $M \in \mathbb{R}^{p\times p}$ ($p \geq 1$) une matrice définie par blocs:
   $$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^\top & C \end{pmatrix},$$
   où $A \in \mathbb{R}^{k\times k}, B \in \mathbb{R}^{k\times l}, C \in \mathbb{R}^{l\times l}$, $k + l = p$ et A et C sont symétriques. On suppose que C est inversible. On appelle le *complément de Schur* de C dans M la matrice $A - BC^{-1}B^\top \in \mathbb{R}^{k\times k}$. Montrer que M est semi-définie positive si et seulement si C et son complément de Schur dans M le sont.
4. Soit $M \in \mathbb{R}^{2d\times 2d}$ la matrice définie par blocs de la manière suivante:
   $$M = \begin{pmatrix} \mathbb{E}[XX^\top] & \mathbb{E}[XY^\top] \\ \mathbb{E}[YX^\top] & \mathbb{E}[YY^\top] \end{pmatrix}.$$
   Montrer que M est l'espérance d'une matrice aléatoire presque sûrement semi-définie positive.
5. Conclure.

Exercice 119

Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 1. Montrer que si $|\mathbb{E}[X]| = \mathbb{E}[|X|]$, alors X est de signe constant presque sûrement.

Exercice 120

Soit Z une variable aléatoire complexe.

1. Vérifier que la partie réelle et la partie imaginaire de Z sont des variables aléatoires réelles. On les notera X et Y, respectivement.
2. On dit que Z admet un moment d'ordre 1 si et seulement si la variable aléatoire réelle $|Z|$ admet un moment d'ordre 1.
   a) Vérifier que Z admet un moment d'ordre 1 si et seulement si X et Y admettent un moment d'ordre 1.
   b) Plus généralement, on dit que Z admet un moment d'ordre $p \geq 1$ si et seulement si $|Z|$ admet un tel moment. Montrer que Z admet un moment d'ordre $p \geq 1$ si et seulement si X et Y admettent un moment d'ordre p.
   c) Vérifier que si Z admet un moment d'ordre 1, alors $|\mathbb{E}[Z]| \leq \mathbb{E}[|Z|]$.
   d) Supposons que Z admette un moment d'ordre 1 et que $|\mathbb{E}[Z]| \leq \mathbb{E}[|Z|]$. Montrer qu'alors, il existe $\theta \in \mathbb{R}$, tel que $e^{-i\theta}Z \in \mathbb{R}$ presque sûrement.

4.5 Inégalités en probabilité

Exercice 121

Démontrer qu'au plus vingt pourcents des français sont plus de cinq fois plus riches que le français moyen.

Exercice 122 Un intervalle de confiance

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires iid de loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$, où $n \geq 1$. Dans une perspective statistique, à l'aide des valeurs prises par $X_1, \ldots, X_n$ (interprétées comme *données*), on cherche à estimer le paramètre p de leur loi, supposé inconnu. Un estimateur raisonnable est donné par la moyenne empirique $\bar{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$.

1. Déterminer $\mathbb{E}[\bar{X}_n]$ et $\mathrm{Var}(\bar{X}_n)$.
2. Montrer que pour tout $t > 0$,

$$P(|\bar{X}_n - p| > t) \leq \frac{1}{4nt^2}.$$

3. Fixons $\alpha \in (0,1)$, pouvant être interprété, dans la suite, comme un niveau de confiance (en pratique, on choisit souvent $\alpha = 0.05$).
   a) Déterminer un réel $t > 0$ tel que $|\bar{X}_n - p| \leq t$ avec probabilité au moins $1 - \alpha$.
   b) En fonction de α et $\varepsilon > 0$, déterminer un nombre n suffisant de données permettant d'obtenir une erreur d'estimation de p d'au plus ϵ avec probabilité au moins $1 - \alpha$.

c) Quelle valeur obtenez-vous pour $\alpha = 0.05$ et $\varepsilon = 0.1$? Pour $\alpha = 0.05$ et $\varepsilon = 0.01$?

4. On admettra, dans cette question, l'inégalité de Hoeffding : si $Y_1, \ldots, Y_n$ sont des variables aléatoires réelles iid telles que $0 \leq Y_1 \leq 1$ presque sûrement, alors pour tout réel $t > 0$,
$$P(|\bar{Y}_n - \mathbb{E}[Y_1]| > t) \leq 2e^{-2nt^2}.$$
   a) En appliquant l'inégalité de Hoeffding, trouver un réel $t > 0$ tel que $|\bar{X}_n - p| \leq t$ avec probabilité au moins $1 - \alpha$.
   b) En fonction de α et $\varepsilon > 0$, déterminer une nouvelle valeur du nombre n suffisant de données permettant d'obtenir une erreur d'estimation de p d'au plus ϵ avec probabilité au moins $1 - \alpha$.
   c) Cette fois-ci, quelle valeur obtenez-vous pour $\alpha = 0.05$ et $\varepsilon = 0.1$? Pour $\alpha = 0.05$ et $\varepsilon = 0.01$?

4.6 Fonctions caractéristiques

Exercice 123

Déterminer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle de loi :

1. Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$;
2. Binomiale de paramètre (n, p), où $n \geq 1$ et $p \in [0, 1]$;
3. Géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre $p \in [0, 1]$;
4. Uniforme sur $[a, b]$, où $a \leq b$.

Exercice 124

Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe de partie réelle strictement positive. On écrit $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$ et on cherche à montrer que $\int_0^\infty e^{-zx}\,\mathrm{d}x = 1/z$.

1. Vérifier que l'intégrale est bien définie.
2. En effectuant des intégrations par parties successives, montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,
$$\int_0^\infty e^{-x} \cos(\alpha x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1 + \alpha^2}$$
et que
$$\int_0^\infty e^{-x} \sin(\alpha x)\,\mathrm{d}x = \frac{-\alpha}{1 + \alpha^2}.$$
3. Conclure.
4. En déduire une expression de la fonction caractéristique de la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Exercice 125

A l'aide des fonctions caractéristiques, démontrer que la somme de n variables aléatoires i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$ suit la loi binomiale de paramètres n, p.

Exercice 126

1. Déterminer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ (on admettra que $\sum_{k=0}^{\infty} z^k/k! = e^z$, pour tout $z \in \mathbb{C}$).
2. En déduire la loi de la somme de n variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$, où $n \geq 1$ est un entier quelconque.

Exercice 127

Dans cet exercice, on cherche à calculer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire gaussienne.

1. Soit X une variable aléatoire réelle gaussienne centrée réduite et soit Φ sa fonction caractéristique.
   a) Montrer, en le justifiant, que Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle satisfait, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Phi'(t) = -t\Phi(t)$.
   b) En déduire l'expression de $\Phi(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2. On suppose cette fois-ci que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, où $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 > 0$.
   a) Rappeler la loi de $\frac{X-\mu}{\sigma}$ (on ne demande pas de redémontrer ce résultat).
   b) En déduire une expression de la fonction caractéristique de X.

* Exercice 128

Montrer que la fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire réel est toujours continue.

Exercice 129

Soit X un vecteur aléatoire réel, de fonction caractéristique Φ. On veut montrer que si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\Phi(t)| = 1$, alors X est nécessairement constant presque sûrement (i.e., $\exists c \in \mathbb{R}^d, X = c$ p.s.).

1. Soit Y une variable aléatoire de même loi que X, mais indépendante de X. Calculer la fonction caractéristique de $X - Y$.
2. En déduire que $X = Y$ presque sûrement.
3. On souhaite en déduire que X est constante presque sûrement. Démontrer qu'il est nécessaire et suffisant de prouver que chaque coordonnée de X est constante presque sûrement. Ainsi, dans toute la suite, on fixe $j \in \{1, \ldots, d\}$ et on va démontrer que X_j est constante presque sûrement.

4. Vérifier que X_j et Y_j (les j-èmes coordonnées de X et Y) sont i.i.d. et vérifient $X_j = Y_j$ presque sûrement.
5. Dans cette question uniquement, supposons que X_j admette un moment d'ordre 2.
   a) Vérifier que $\mathrm{Var}(X_j) = \frac{1}{2}\mathbb{E}[(X_j - Y_j)^2]$.
   b) Conclure.
6. On ne suppose plus l'existence d'un moment d'ordre 2. Soit F_j la fonction de répartition de X_j et supposons, par l'absurde, l'existence d'un réel t tel que $0 < F_j(t) < 1$.
   a) Vérifier que $P(X_j \le t) > 0$ et $P(X_j > t) > 0$.
   b) Calculer $P(X_j \le t, Y_j > t)$.
   c) Conclure.

* Exercice 130

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles i.i.d. On suppose que $X+Y$ et $X-Y$ sont indépendantes. Le but de cet exercice est de montrer qu'alors, nécessairement, X et Y sont gaussiennes.

1. Soit Φ la fonction caractéristique de X. Montrer que pour tous $s, t \in \mathbb{R}$,
$$\Phi(s+t)\Phi(s-t) = \Phi(s)^2|\Phi(t)|^2.$$
2. Déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\Phi(t) = \Phi\left(\frac{t}{2^n}\right)^{2^n} \left|\Phi\left(\frac{t}{2^n}\right)\right|^{4^n - 2^n}$$
et donc, que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Phi(t) \neq 0$.
3. On admettra le théorème de relèvement: Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction continue telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) \neq 0$, il existe une fonction continue $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = |f(t)|e^{ig(t)}$. En déduire l'existence d'une fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue telle que $\phi(0) = 0$ et $\Phi = e^{\phi}$.
4. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi(-t) = \overline{\phi(t)}$.
5. Démontrer que pour tous $s, t \in \mathbb{R}$,
$$\phi(s+t) + \phi(s-t) = 2\phi(s) + \phi(t) + \phi(-t).$$
6. On définit la partie paire ϕ_1 et la partie impaire ϕ_2 de ϕ de la manière suivante:
$$\phi_1(t) = \frac{1}{2}\left(\phi(t) + \phi(-t)\right) \quad \text{et} \quad \phi_2(t) = \frac{1}{2}\left(\phi(t) - \phi(-t)\right),$$
pour tout $t \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi_1(t) \in \mathbb{R}$ et $\phi_2(t) \in i\mathbb{R}$.

b) En utilisant la question 4 (en (s,t) et en $(-s,t)$), montrer que pour tout $s, t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \phi_1(s+t) + \phi_1(s-t) = 2\phi_1(s) + 2\phi_1(t) \\ \phi_2(s+t) + \phi_2(s-t) = 2\phi_2(s) \end{cases}$$

7. Pour la partie impaire ϕ_2:

a) Déduire que pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\phi_2(2s) = 2\phi(s)$, puis que pour tout $s, t \in \mathbb{R}$, $\phi_2(s+t) = \phi_2(s) + \phi_2(t)$.

b) Montrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_2(t) = it\mu.$$

8. Pour la partie paire ϕ_1: soit $Q(s,t) = \phi_1(s+t) - \phi_1(s) - \phi_1(t)$, pour $s, t \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que la fonction Q est bilinéaire et symétrique.

b) En déduite l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $s, t \in \mathbb{R}$, $Q(s,t) = \lambda st$.

c) Montrer que $\phi_1(0) = 0$.

d) En déduire que $\phi_1(t) = \frac{\lambda}{4}t^2$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

e) Montrer que nécessairement, $\lambda \leq 0$.

9. En déduire que X est ou bien constante, ou bien gaussienne.

5 Espérances conditionnelles

5.1 Calcul d'espérances conditionnelles

Exercice 131

Soit $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ muni de sa tribu discrète $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et de la probabilité uniforme $P = \mathcal{U}(\Omega)$. Soit X la variable aléatoire réelle définie par $X(\omega) = \omega$, pour tout $\omega \in \Omega$. Soit $\mathcal{B}$ la sous-tribu de $\mathcal{A}$ codant l'information de la parité de X, i.e., $\mathcal{B} = \{\emptyset, \{1,3,5\}, \{2,4,6\}, \Omega\}$.

1. Montrer que si $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle $\mathcal{B}$-mesurable, alors elle est constante sur $\{1,3,5\}$ et sur $\{2,4,6\}$.
2. Déterminer $\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]$.

Exercice 132

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et soit $A \in \mathcal{A}$. Soit $\mathcal{B}$ la sous-tribu de $\mathcal{A}$ engendrée par A. On suppose que X admet un moment d'ordre 1.

1. Montrer que pour toute variable aléatoire $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable par rapport à $\mathcal{B}$, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $Y = \lambda \mathbb{1}_A + \mu \mathbb{1}_{A^\complement}$.
2. En déduire une expression de $\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]$ (on pourra distinguer les cas où $P(A) = 0$ ou 1).
3. Vérifier qu'on a bien $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]] = \mathbb{E}[X]$.

Exercice 133

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et intégrable. Soient $A_1, \dots, A_n$ des éléments de $\mathcal{A}$, deux à deux disjoints, tels que $A_1 \cup \dots \cup A_n = \Omega$ ($n \geq 1$). Soit $\mathcal{B}$ la sous-tribu de $\mathcal{A}$ engendrée par $A_1, \dots, A_n$.

1. Montrer que tout élément de $\mathcal{B}$ s'écrit sous la forme $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i$, pour un certain sous-esnemble (éventuellement vide) I de $\{1, \dots, n\}$.
2. En déduire que toute variable aléatoire réelle $\mathcal{B}$-mesurable sécrit sous la forme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{1}_{A_i}$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression de $\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]$.

Exercice 134

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $A, B \in \mathcal{A}$. Déterminer $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A|\mathbb{1}_B]$.

Exercice 135

Soit X une variable aléatoire réelle intégrable et symétrique (i.e., X et $-X$ ont la même loi). Calculer $\mathbb{E}[X||X|]$.

Exercice 136

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles intégrables et i.i.d., où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que pour tout $i = 1, \dots, n$, $\mathbb{E}[X_i|X_1 + \dots + X_n] = \mathbb{E}[X_1|X_1 + \dots + X_n]$.
2. En déduire $\mathbb{E}[X_1|X_1 + \dots + X_n]$.

Exercice 137

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. admettant un moment d'ordre 1, noté μ, et N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, admettant un moment d'ordre 1, et indépendante de $(X_n)_{n \geq 1}$. Déterminer l'espérance conditionnelle de $\sum_{i=1}^{N} X_i$ sachant N.

Exercice 138 Martingales

Soit $(M_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles intégrables. On dit que la suite $(M_n)_{n\geq 1}$ est

- une martingale si et seulement si pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}[M_{n+1}|M_n] = M_n \quad \text{p.s.}$$

- une sous-martingale si et seulement si pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}[M_{n+1}|M_n] \geq M_n \quad \text{p.s.}$$

- une sur-martingale si et seulement si pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}[M_{n+1}|M_n] \leq M_n \quad \text{p.s.}$$

1. Si $(M_n)_{n\geq 1}$ est une martingale (resp. sous-martingale, sur-martingale), montrer que la suite $(\mathbb{E}[M_n])_{n\geq 1}$ est constante (resp. croissante, décroissante).
2. Si $(M_n)_{n\geq 1}$ est une martingale est f est une fonction convexe strictement monotone telle que pour tout $n \geq 1$, $f(M_n)$ est intégrable, montrer que $(f(M_n))_{n\geq 1}$ est une sous-martingale.
3. Soit X une variable aléatoire réelle intégrable sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et soit $(\mathcal{A}_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de sous-tribus de $\mathcal{A}$. Montrer que la suite $(\mathbb{E}[X|\mathcal{A}_n])_{n\geq 1}$ est une martingale.
4. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $p\delta_{\{1\}} + (1-p)\delta_{\{-1\}}$, où $p \in [0,1]$. Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Suivant la valeur de p, établir si $(S_n)_{n\geq 1}$ est une martingale, une sous-martingale ou une sur-martingale.

* Exercice 139 Lemme de Doob-Dynkin

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$ quelconque. Soit $\mathcal{B}$ la tribu engendrée par X et soit Y une variable aléatoire $\mathcal{B}$-mesurable, à valeurs dans un espace mesurable $(F, \mathcal{F})$. On cherche à montrer que Y s'écrit nécessairement comme une fonction mesurable de X.

1. Supposons Y de la forme $\mathbb{1}_A$, pour un certain $A \in \mathcal{A}$.
   a) Vérifier que nécessairement, $A = X^{-1}(B)$ pour un certain $B \in \mathcal{E}$.
   b) En déduire une fonction mesurable $h : E \to F$ telle que $Y = h(X)$.
2. Vérifier que le résultat reste vrai si Y est étagée.
3. Supposons à présent que Y est une variable aléatoire quelconque.
   a) Montrer que sans perte de généralité, on peut supposer que Y est positive, ce qu'on fait dans les questions suivantes.

b) Conclure en approchant Y par une suite croissante de variables aléatoires étagées.

Exercice 140

Soient X et Y deux variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0, 1]$. Déterminer (après s'être assuré de leur existence) $\mathbb{E}[X/(X+Y)|Y]$ et $\mathbb{E}[\max(X, Y)|X]$.

Exercice 141

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose que X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et que $Y \geq 0$ presque sûrement. Déterminer $\mathbb{E}[e^{-XY}|Y]$.

Exercice 142 Théorème de transfert conditionnel, cas non indépendant, à densité

1. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans des espaces mesurables $(E, \mathcal{E})$ et $(F, \mathcal{F})$, respectivement. Soient μ et ν deux mesures sur $(E, \mathcal{E})$ et $(F, \mathcal{F})$, respectivement. On suppose que la loi jointe de X et Y admet une densité, qu'on notera $f_{(X,Y)}$, par rapport à la mesure produit $\mu \otimes \nu$. Soit $h : E \times F \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que $h(X, Y) \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montrer que $\mathbb{E}[h(X, Y)|X] = \phi(X)$ p.s., où $\phi : E \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par
$$\phi(x) = \begin{cases} \int_F h(x, y) \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)} \, \mathrm{d}\nu(y) \text{ si } f_X(x) \neq 0, \\ \pi \log(2) \text{ sinon} \end{cases},$$
où f_X est la densité de X par rapport à μ.
2. Application : soient X, Y deux variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0, 1]$ et $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$. On cherche à déterminer $\mathbb{E}[X|V]$.
   a) Montrer que la loi jointe de U et V admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue, qu'on déterminera.
   b) Justifier le fait que $\mathbb{E}[X|V] = \mathbb{E}[Y|V]$.
   c) Vérifier que $\mathbb{E}[X + Y|V] = \mathbb{E}[U + V|V]$.
   d) Déduire une expression de $\mathbb{E}[X|V]$.

Exercice 143

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles de carré intégrable satisfaisant $\mathbb{E}[X|Y] = Y$ et $\mathbb{E}[Y|X] = X$ presque sûrement.

1. Montrer que $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[Y^2]$.
2. En déduire que $X = Y$ presque sûrement.
3. Supposons X et Y seulement intégrables.

a) Proposer une fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui soit continue, strictement croissante et bornée.
b) Vérifier que la variable aléatoire $(X - Y)(\phi(X) - \phi(Y))$ est intégrable et positive.
c) Montrer que $\mathbb{E}[(X - Y)(\phi(X) - \phi(Y))] = 0$.
d) Conclure que $X = Y$ presque sûrement.

* Exercice 144

Soit X un vecteur aléatoire réel intégrable sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. Montrer que X a la même loi que $\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]$ si et seulement si elle est $\mathcal{B}$-mesurable (auquel cas, $X = \mathbb{E}[X|\mathcal{B}]$).

Exercice 145 Identité de la variance

Soit X une variable aléatoire réelle de carré intégrable définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. On définit la variance conditionnelle de X sachant $\mathcal{B}$ comme

$$\mathrm{Var}(X|\mathcal{B}) = \mathbb{E}[X^2|\mathcal{B}] - \mathbb{E}[X|\mathcal{B}]^2.$$

Vérifier l'identité suivante:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}\left(\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]\right) + \mathbb{E}\left[\mathrm{Var}(X|\mathcal{B})\right].$$

5.2 Version conditionnelle d'inégalités classiques

Exercice 146 Inégalité de Cauchy-Schwarz conditionnelle

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. On suppose X et Y de carré intégrable. Montrer l'inégalité suivante:

$$\mathbb{E}[XY|\mathcal{B}]^2 \leq \mathbb{E}[X^2|\mathcal{B}]\mathbb{E}[Y^2|\mathcal{B}] \text{ p.s.}$$

Exercice 147 Inégalité de Jensen conditionnelle

Soit X un vecteur aléatoire réel défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) et soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction convexe différentiable. On suppose que X et $f(X)$ sont intégrables. Montrer que

$$f\left(\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]\right) \leq \mathbb{E}[f(X)|\mathcal{B}] \text{ p.s.}$$

Qu'en est-il du cas où f n'est pas différentiable ? *On pourra utiliser le fait que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $f(x) = \sup_{(a,b)\in H} a^\top x + b$, où $H = \{(a, b) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : f(y) \geq a^\top y + b, \forall y \in \mathbb{R}^d\}$.)*

* Exercice 148 Inégalité de Hölder conditionnelle

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$.

1. Soient $p, q > 1$ deux réels satisfaisant $1/p + 1/q = 1$. On suppose que $X \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et que $Y \in L^q(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montrer que

$$\mathbb{E}[|XY||\mathcal{B}] \leq \mathbb{E}[|X|^p|\mathcal{B}]^{1/p}\mathbb{E}[|Y|^q|\mathcal{B}]^{1/q} \text{ p.s.}$$

2. En déduire que si $X \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, P)$ pour un certain $p \geq 1$, alors $\mathbb{E}[X|\mathcal{B}] \in L^p(\Omega, \mathcal{B}, P)$.

6 Lois conditionnelles

Exercice 149

Dans chacun des cas suivants, calculer la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$:

1. $Y = XZ$, où X et Z sont des variables aléatoires réelles indépendantes, Z suit la loi exponentielle de paramètre 1 et $x > 0$.
2. $Y = X + Z$, où X et Z sont des variables aléatoires réelles indépendantes, Z suit la loi normale centrée réduite et $x \in \mathbb{R}$.
3. $Y = XZ$, où X et Z sont des variables aléatoires réelles indépendantes, Z suit la loi normale centrée réduite et $x \in \mathbb{R}$.
4. $Y = X(Z + X)$, où X et Z sont des variables aléatoires réelles indépendantes, Z suit la loi normale centrée réduite et $x \in \mathbb{R}$.
5. $Y = XZ$, où X et Z sont des variables aléatoires réelles indépendantes, Z suit la loi uniforme sur $[1, 2]$ et $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 150

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. normales centrées réduites, et N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante de $(X_n)_{n\geq 1}$. On pose $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$.

1. Déterminer la loi conditionnelle de S sachant $N = n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Si N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, en déduire l'espérance de S.

Exercice 151

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1 et soit $S = X + Y$.

1. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $S = s$, pour tout $s > 0$.

2. En déduire la loi conditionnelle de X/S sachant $S = s$, pour tout $s > 0$.
3. Les variables aléatoires X/S et S sont-elles indépendantes ?

Exercice 152 Moments conditionnels

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, ,P)$. On suppose que X est à valeurs dans un espace mesurable quelconque $(E, \mathcal{E})$ et que Y est réelle. On suppose aussi que $Y \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, P)$, où $p \in \mathbb{N}^*$.

1. Pour tout $k = 1, \dots, p$, on définit la fonction
$$\begin{aligned} m_k \colon E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_{\mathbb{R}} y^k \,\mathrm{d}P_{Y|X=x}(y). \end{aligned}$$
Pour tout $x \in E$, $m_k(x)$ est appelé "k-ème moment conditionnel de Y sachant $X = x$". Montrer que $m_1(x), \dots, m_p(x)$ sont bien définis pour P_X-presque tout $x \in E$.
2. Vérifier que pour tout $k = 1, \dots, p$,
$$\mathbb{E}[Y^k|X] = m_k(X).$$
3. Dans la suite, on suppose que $p \geq 2$. Pour tout $x \in E$, on appelle "variance conditionnelle de Y sachant $X = x$" la variance d'une variable aléatoire réelle de loi $P_{Y|X=x}$. On note $v(x)$ cette quantité. Vérifier que pour tout $x \in E$, $v(x)$ est bien définie et que
$$v(x) = m_2(x) - m_1(x)^2.$$
Dans la suite, on note $\mathsf{Var}(Y|X)$ la variable aléatoire $v(X)$.
4. Montrer qu'on a l'égalité suivante:
$$\mathsf{Var}(Y) = \mathbb{E}[\mathsf{Var}(Y|X)] + \mathsf{Var}(\mathbb{E}[Y|X]).$$

Exercice 153

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes, telles que Y est intégrable. Retrouver l'égalité $\mathbb{E}[Y|X] = \mathbb{E}[Y]$ en utilisant le théorème de transfert conditionnel.

Exercice 154

Dans les cas suivants, déterminer l'espérance conditionnelle de X_1 sachant $X_1 + X_2$:

1. X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires réelles indépendantes de lois binomiales de paramètres respectifs (n_1, p) et (n_2, p), où $p \in]0, 1[$ et $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$.

2. X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles indépendantes de lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2, où $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.
3. X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles indépendantes de lois exponentielles de paramètres respectifs λ_1 et λ_2, où $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

Exercice 155

Soit f la fonction de deux variables réelles définie par:

$$f(x,y) = Cxe^{-x(x+y)/2}\mathbb{1}_{x,y\geq 0}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

où C est un nombre positif donné. En effectuant le moins de calculs possible, déterminer $\mathbb{E}[Y|X]$.

Exercice 156

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans des espaces mesurables $(E, \mathcal{E})$ et $(F, \mathcal{F})$ respectivement, et soit $h : E \times F \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable.

1. Soit $f : F \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Démontrer que pour tout $x \in E$, $f\#P_{Y|X=x}$ est une loi conditionnelle de $f(Y)$ sachant $X = x$.
2. Démontrer que pour tout $x \in E$, $P_{h(x,Y)|X=x}$ est une loi conditionnelle de $h(X,Y)$ sachant $X = x$.
3. En déduire que si X et Y sont indépendantes, alors pour tout $x \in E$, $P_{h(x,Y)}$ est une loi conditionnelle de Y sachant $X = x$.
4. En déduire que si X et Y sont indépendantes et $h(X,Y)$ est intégrable, alors

$$\mathbb{E}[h(X,Y)|X] = \phi(X),$$

où $\phi : E \to \mathbb{R}$ est la fonction mesurable donnée par $\phi(x) = \mathbb{E}[h(x,Y)]$, pour tout $x \in E$.

Exercice 157

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles, dont la loi jointe est supposée continue, de densité donnée par

$$f(x,y) = Ce^{-y}\mathbb{1}_{0\leq x\leq y}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

où C est un nombre positif donné.

1. Déterminer la valeur de C.
2. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant Y.
3. En déduire la loi conditionnelle de X/Y sachant Y.
4. Qu'en déduit-on sur les variables aléatoires X/Y et Y ?

7 Convergence de suites de variables aléatoires

Dans cette partie, toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

7.1 Modes de convergence

On rappelle le théorème de Borel-Cantelli. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événement dans $\mathcal{A}$. Alors:

- Si $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, alors $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$;
- Si, de plus, les événements $A_1, A_2, \ldots$ sont indépendants, alors si $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, alors $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$.

(On rappelle que $\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{p=n}^{\infty} A_p$*.)*

Exercice 158

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles. Montrer que les ensembles suivants sont des événements :

1. $\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\}$
2. $\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty\}$
3. $\{\omega \in \Omega : (X_n(\omega)) \text{ converge}\}$

Exercice 159

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de vecteurs aléatoires réels dans $\mathbb{R}^d$ et X un vecteur aléatoire réel donné. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$

(ii) $\forall \varepsilon > 0, P(\|X_n - X\| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

(iii) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, P(\|X_n - X\| > \varepsilon) \leq \varepsilon$

(iii) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, P(\|X_n - X\| \geq \varepsilon) \leq \varepsilon$

Exercice 160

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de vecteurs aléatoires réels.

1. Montrer que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$ si et seulement si $\mathbb{E}\left[\frac{\|X_n - X\|}{\|X_n - X\| + 1}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
2. Plus généralement, montrer que si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est n'importe quelle fonction strictement croissante, majorée, continue en zéro, avec $f(0) = 0$, alors $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$ si et seulement si $\mathbb{E}[f(\|X_n - X\|)] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Indice : on rappelle que pour toute variable aléatoire positive Z,

$$\mathbb{E}[Z] = \int_0^\infty P(Z > t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 161

Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Pour tout $n \geq 1$, on pose $X_n = \min(Z_1, \ldots, Z_n)$. Montrer que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$.

Exercice 162

Pour tout entier $n \geq 1$, soit X_n une variable aléatoire de loi $(1 - 1/n)\delta_{\{1/n\}} + 1/n\delta_{\{n\}}$.

1. Démontrer que X_n converge en probabilité vers zéro.
2. Supposons que $X_1, X_2, \ldots$ sont indépendantes. La suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle presque sûrement ?

Exercice 163

Pour tout entier $n \geq 1$, soit X_n une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $1/n$. Montrer que

$$(n!)^{n^n} X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0.$$

* Exercice 164

Soit (M, d) un espace métrique et $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de M, convergeant vers un élément $x \in M$. Pour chaque $n \geq 1$, on définit une variable aléatoire X_n à valeurs dans M (muni de sa tribu borélienne), de loi uniforme dans l'ensemble $\{x_{\lfloor n/2\rfloor}, x_{\lfloor n/2\rfloor+1}, \ldots, x_n\}$. Montrer que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} x$.

Exercice 165

1. Soient $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires réelles i.i.d. On suppose que X_1 admet un moment d'ordre 2. Montrer que la moyenne empirique de $X_1, \ldots, X_n$ tend en probabilité vers $\mathbb{E}[X_1]$, lorsque $n \to \infty$.
2. En déduire que si, pour tout $n \geq 1$, Y_n est une variable binomiale de paramètres n et $p \in [0,1]$, alors Y_n/n converge en probabilité, lorsque $n \to \infty$, vers une variable aléatoire que l'on déterminera.
3. Soient $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires réelles i.i.d. Pour tout $n \geq 1$, on note Y_n le nombre d'indices $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tels que $X_{2i} < X_{2i+1}$. La suite Y_n/n converge-t-elle en probabilité ?

Exercice 166

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de vecteurs aléatoires réels et X un vecteur aléatoire réel.

1. Montrer que si, pour tout $\varepsilon > 0$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(\|X_n - X\| > \varepsilon) < \infty$, alors X_n converge presque sûrement vers X.
2. Montrer que s'il existe $p \geq 1$ tel que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[\|X_n - X\|^p] < \infty$, alors X_n converge presque sûrement vers X.

Exercice 167

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles de même loi.

1. Montrer que X_n/n converge en probabilité vers zéro.
2. Supposons, dans cette question, que $X_1, X_2, \ldots$ sont indépendantes (donc i.i.d.). On souhaite montrer que X_n/n converge presque sûrement vers zéro si et seulement si X_1 est intégrable.
   a) Montrer que X_1 est intégrable si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} P(|X_1| > \varepsilon t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie.
   b) En déduire que X_1 est intégrable si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|\frac{X_n}{n}\right| > \varepsilon\right)$ est finie.
   c) Conclure (on pourra utiliser les résultats de l'exercice 166).

Exercice 168

1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires, telles que pour tout $n \geq 1$, X_n suit la loi de Poisson de paramètre $1/n$.
   a) Montrer que X_n converge en probabilité vers zéro, lorsque $n \to \infty$.
   b) Montrer que $(n!)^{e^{n^{n!}}} X_n$ converge en probabilité vers zéro.

c) Si $X_1, X_2, \ldots$ sont indépendantes, la suite X_n converge-t-elle presque sûrement vers zéro ?

d) Soient $Z_1, Z_2, \ldots$ des variables aléatoires réelles indépendantes, telles que pour tout $n \geq 1$, Z_n suit la loi de Poisson de paramètre $n^{-1} - (n+1)^{-1}$.

i – Montrer qu'avec probabilité 1, la série de terme général Z_n converge. On peut alors définir, sans ambiguïté avec probabilité 1, les variables aléatoires $X_n = \sum_{k=n}^{\infty} Z_k$, pour tout $n \geq 1$.

ii – Montrer que pour tout $n \geq 1$, X_n suit la loi de Poisson de paramètre $1/n$. On pourra calculer sa fonction caractéristique à l'aide du théorème de convergence dominée.

iii – Montrer que X_n converge presque sûrement vers 0.

2. Pour tout $n \geq 1$, soit X_n une variable aléatoire exponentielle de paramètre n. X_n converge-t-elle presque sûrement, lorsque $n \to \infty$?
3. Montrer que le minimum de n variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0, 1]$ converge presque sûrement vers zéro, lorsque $n \to \infty$ (ceci n'est pas la même question que l'exercice 163 !).

* Exercice 169

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de vecteurs aléatoires réels de taille $d \geq 1$. On cherche à montrer que $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité si et seulement si toute sous-suite admet une sous-suite qui converge en presque sûrement, et que la limite est nécessairement la même.

1. Supposons que X_n converge en probabilité, vers un vecteur aléatoire qu'on note X.

   a) Pour tout entier $p \geq 1$, montrer l'existence d'un entier $n(p)$ tel que $P(\|X_{n(p)} - X\| > 1/p) \leq 2^{-p}$.

   b) Montrer qu'on peut supposer que $n(1) < n(2) < \ldots$.

   c) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{p \geq 1} P(\|X_{n(p)} - X\| > \varepsilon) < \infty.$$

   d) En déduire le sens direct de l'équivalence qu'on souhaite montrer.

2. Supposons que toute sous-suite de $(X_n)_{n \geq 1}$ admet une sous-suite qui converge presque sûrement.

   a) Démontrer que la limite presque sûre ne dépend pas du choix de la sous-suite. On notera X cette limite.

b) Supposons par l'absurde que X_n ne converge pas en probabilité vers X. Montrer l'existence de deux réels $\alpha, \varepsilon > 0$ et d'une sous-suite $(X_{\phi(n)})_{n\geq 1}$ tels que $P(\|X_{\phi(n)} - X\| > \varepsilon) \geq \alpha$.

c) Conclure.

* Exercice 170 Loi du zéro/un de Kolmogorov

Soit $(\mathcal{A}_n)_{n\geq 1}$ une suite de sous-tribus de $\mathcal{A}$, indépendantes. On appelle tribu asymptotique la tribu $\mathcal{A}_\infty = \bigcap_{n\geq 1} \sigma\left(\bigcup_{p\geq n} \mathcal{A}_p\right)$. On va montrer que pour tout $A \in \mathcal{A}_\infty$, $P(A) \in \{0, 1\}$: c'est la loi du zéro/un de Kolmogorov.

1. Vérifier que $\mathcal{A}_\infty$ est bien une sous-tribu de $\mathcal{A}$.
2. Vérifier que pour tout $m, n \geq 1$ avec $m < n$, les tribus $\mathcal{A}_m$ et $\sigma\left(\bigcup_{p\geq n} \mathcal{A}_p\right)$ sont indépendantes.
3. En déduire que $\mathcal{A}_\infty$ est indépendante d'elle-même.
4. En déduire la loi du zéro/un de Kolmogorov.
5. Donner un contre-exemple à la loi du zéro/un de Kolmogorov, lorsqu'on enlève l'hypothèse d'indépendance des sous-tribus.
6. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose que pour tout $n \geq 1$, $\mathcal{A}_n$ est la tribu engendrée par X_n.
   a) Les événements suivants sont-ils dans la tribu asymptotique $\mathcal{A}_\infty$?
      i – $\{\omega \in \Omega : (X_n(\omega))_{n\geq 1} \text{ converge}\}$
      ii – $\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \geq X_1(\omega) \text{ pour une infinité de valeurs de } n\}$
      iii – $\{\omega \in \Omega : (X_n(\omega))_{n\geq 1} \text{ est constante à partir d'un certain rang}\}$
      iv – $\{\omega \in \Omega : \sum_{i=1}^n X_i(\omega) \geq 0 \text{ pour une infinité de valeurs de } n\}$
      v – $\{\omega \in \Omega : (\sum_{i=1}^n X_i(\omega))_{n\geq 1} \text{ converge}\}$
      vi – $\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \neq 0 \text{ pour une infinité de valeurs de } n\}$
      vii – $\{\omega \in \Omega : (X_n(\omega))_{n\geq 1} \text{ admet 0 comme valeur d'adhérence}\}$
      viii – $\{X_n(\omega) = a_1, X_{n+1}(\omega) = a_2, \ldots, X_{n+p}(\omega) = a_p\}$, où $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R}$ sont des nombres réels fixés, et $p \geq 1$ est un entier donné.

   b) Montrer le paradoxe du singe savant : si un singe est placé devant une machine à écrire et tape aléatoirement, et indéfiniment, sur les touches de la machine, alors avec probabilité un, il écrira une infinité de fois, sans faute d'orthographe, *La recherche du temps perdu* dans son intégralité.

   c) Supposons que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement, vers une variable aléatoire réelle X. Montrer que X est $\mathcal{A}_\infty$-mesurable, et qu'elle est donc presque sûrement constante.

* Exercice 171 Convergence en probabilité dans un espace métrique

Soit (M,d) un espace métrique, et soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires sur M (muni de sa tribu borélienne). On suppose que X_n converge en probabilité vers une variable aléatoire X, i.e., pour tout $\varepsilon > 0$, $P(d(X_n, X) > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Soit (N,ρ) un second espace métrique et soit $g : M \to N$ une application continue. On cherche à montrer que $g(X_n)$ converge alors en probabilité vers $g(X)$. On fixe $\varepsilon > 0$ quelconque, et on souhaite donc montrer que $P(\rho(g(X_n), g(X)) > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Pour tout $\delta > 0$, on pose $B_\delta = \{x \in M : \exists y \in M, d(x,y) > \delta, \rho(g(x), g(y)) \leq \varepsilon\}$.

1. Vérifier que $\bigcap\limits_{\delta>0} B_\delta = \emptyset$.
2. En déduire (soigneusement !) que $\lim\limits_{\delta\to 0} P(X \in B_\delta) = 0$.
3. Montrer que pour tout $\delta > 0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$P(\rho(g(X_n), g(X)) > \varepsilon) \leq P(d(X_n, X) > \delta) + P(X \in B_\delta).$$

4. Conclure.

7.2 Lois des grands nombres

Exercice 172 Lemme de Cesàro

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels. On suppose que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n u_i \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$. A l'aide d'un contre-exemple, montrer que la réciproque n'est pas toujours vraie.

Exercice 173 Lemme de Kronecker

Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels et $(w_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de réels telle que $w_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. Montrer que si la série de terme général u_n converge, alors

$$\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^n w_i u_i \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Exercice 174 Une loi faible des grands nombres

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes admettant un moment d'ordre 2. Pour tout $n \geq 1$, on pose $m_n = \frac{\mathbb{E}[X_1]+\ldots+\mathbb{E}[X_n]}{n}$. On suppose que pour tout $n \geq 1$, $\mathrm{Var}(X_n) \leq \sigma^2$, où $\sigma^2 > 0$ est un nombre fixé.

1. Supposons que m_n tend vers un certain nombre réel m. Montrer qu'alors, $\bar{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} m$ *(on pourra utiliser l'inégalité de Bienaymé Chebychev).*

2. Supposons que $\mathbb{E}[X_n]$ tend vers un certain réel m. Montrer qu'alors, $m_n \xrightarrow[n\to\infty]{} m$ et que $\bar{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} m$.
3. Montrer qu'on a toujours $\bar{X}_n - m_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0$.

Exercice 175 Une autre loi faible des grands nombres

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles de carré intégrable. On suppose que pour tout $i, j \geq 1$ avec $i \neq j$, $\mathrm{cov}(X_i, X_j) = 0$, et que $\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Montrer qu'alors,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}[X_i]) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0.$$

Exercice 176 Encore une loi faible des grands nombres

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d et intégrables. On cherche à montrer que

$$\bar{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} \mathbb{E}[X_1].$$

Pour chaque $n \geq 1$, on pose $Y_i = X_i - \mathbb{E}[X_1]$.

1. Montrer qu'il suffit de prouver que $\bar{Y}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0$.
2. Pour chaque $n \geq 1$, on pose $Z_n = Y_n \mathbb{1}_{|Y_n|\leq n}$.
   a) Montrer que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[Z_i] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
   b) Fixons $n \geq 1$.
      i – Montrer que pour tout $i = 1, \dots, n$, $\mathrm{Var}(Z_i) \leq \mathbb{E}[X_1^2 \mathbb{1}_{|X_1|\leq n}]$.
      ii – Montrer que $\mathbb{E}[X_1^2 \mathbb{1}_{|X_1|\leq\sqrt{n}}] \leq \sqrt{n}\mathbb{E}[|X_1|]$.
      iii – Montrer que $\mathbb{E}[X_1^2 \mathbb{1}_{\sqrt{n}<|X_1|\leq n}] \leq n\mathbb{E}[|X_1|\mathbb{1}_{|X_1|>\sqrt{n}}]$.
   c) En déduire que
   $$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(Z_i) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$
   d) A l'aide de l'exercice précédent, conclure que $\bar{Z}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0$.
3. Il ne reste plus qu'à montrer que $\bar{Y}_n - \bar{Z}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0$.
   a) Montrer qu'avec probabilité 1, $Y_n = Z_n$ pour tout n assez grand *(on pourra utiliser le résultat de l'exercice précédent)*.
   b) En déduire que $\bar{Y}_n - \bar{Z}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{p.s}} 0$.
   c) Conclure.

Remarque. *Dans l'exercice 182 plus bas, on montrera qu'on a en fait la convergence presque sûre de $\bar{X}_n$ vers $\mathbb{E}[X_1]$, sous l'hypothèse que les X_n sont i.i.d.*

Exercice 177 Le cas de la loi de Cauchy

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d de loi de Cauchy. On rappelle que la loi de Cauchy est la loi absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, de densité donnée par $f(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)}, x \in \mathbb{R}$. On admet que la fonction caractéristique de cette loi est donnée par $\Phi(t) = e^{-|t|}, t \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\bar{X}_n$ suit la loi de Cauchy.
2. En déduire qu'il n'existe pas de nombre réel c tel que $\bar{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} c$.

Exercice 178 Inégalité de Kolmogorov

Soient $X_1, \ldots, X_n$ $(n \geq 1)$ des variables aléatoires réelles indépendantes, centrées (i.e, d'espérance nulle) admettant un moment d'ordre 2. Pour tout $k = 1, \ldots, n$, on note $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$ et on cherche à montrer l'inégalité suivante, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P\left(\max_{1\leq k\leq n} |S_k| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i).$$

On note E l'événement $\{\max_{1\leq k\leq n} |S_k| > \varepsilon\}$ et pour $k = 1, \ldots, n$, on définit l'événement $E_k = \{|S_k| > \varepsilon, |S_i| \leq \varepsilon, \forall i = 1, \ldots, k-1\}$ (E_1 estsimplement l'événement $\{|S_1| > \varepsilon\}$).

1. Vérifier que $P(E) = P(E_1) + \ldots + P(E_n)$.
2. Vérifier que pour tout $k = 1, \ldots, n$, $P(E_k) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{E}[\mathbb{1}_{E_k} S_k^2]$.
3. Fixons $k \in \{1, \ldots, n\}$. On va montrer que $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{E_k} S_k^2] \leq \mathbb{E}[\mathbb{1}_{E_k} S_n^2]$.
   a) Vérifier que
   $$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{E_k} S_n^2] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{E_k}\mathbb{E}[(S_k + X_{k+1} + \ldots + X_n)^2|(X_1, \ldots, X_k)]].$$
   b) A l'aide du théorème de transfert conditionnel, en déduire l'inégalité recherchée.
4. Déduire des questions précédentes que $P(E) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\mathrm{Var}(S_n)$ et conclure.

Exercice 179 Séries de variables aléatoires

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes admettant un moment d'ordre 2, et satisfaisant $\mathbb{E}[X_n] = 0$ pour tout $n \geq 1$. Supposons que $\sum_{n=1}^\infty \mathrm{Var}(X_i) < \infty$. On souhaite montrer qu'alors, la série de terme général X_n converge presque sûrement, i.e., $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ converge presque sûrement, lorsque $n \to \infty$. Pour chaque $n \geq 1$, on pose $A_n = \sup_{k\geq 1} |S_{n+k} - S_n|$ et $A = \inf_{n\geq 1} A_n$.

1. Montrer qu'il est nécessaire et suffisant de vérifier que $A = 0$ p.s.
2. Vérifier que $A = 0$ p.s si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, $P(\forall n \geq 1, A_n > \varepsilon) = 0$.
3. Soit $\varepsilon > 0$. Fixons $n \geq 1$.
   a) Montrer que
$$P(A_n > \varepsilon) = \lim_{r\to\infty} P(\max_{1\leq k\leq r} |S_{n+k} - S_n| > \varepsilon).$$
   b) En utilisant le résultat démontré dans l'exercice précédent, en déduire que
$$P(A_n > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathrm{Var}(X_k).$$
4. En déduire que $P(\forall n \geq 1, A_n > \varepsilon) = 0$ et conclure.

Exercice 180 Une loi forte des grands nombres

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de carré intégrable. On suppose que $\mathbb{E}[X_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} m \in \mathbb{R}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Var}(X_n)}{n^2} < \infty$.

1. Pour tout $n \geq 1$, soit $Y_n = \frac{X_n - \mathbb{E}[X_n]}{n}$. Vérifier que la série de terme général $\mathrm{Var}(Y_n)$ converge.
2. En déduire que que $\bar{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s}} m$ *(on pourra utiliser l'exercice précédent ainsi que les lemmes de Cesàro et de Kronecker démontrés dans les exercices 173)* et 172.

* Exercice 181 Une preuve alternative de la loi forte des grands nombres pour des variables i.i.d de carré intégrable

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. de carré intégrable. Pour tout $n \geq 1$, on note $\bar{X}_n$ la moyenne empirique de $X_1, \dots, X_n$. On cherche à montrer que $\bar{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}[X_1]$.

1. Pour tout $n \geq 1$, on note $Y_n = X_n - \mathbb{E}[X_1]$. Montrer qu'il est nécessaire et suffisant de montrer que $\bar{Y}_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$. Dans toute la suite, on note $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$, pour tout entier $n \geq 1$, de sorte que $\bar{Y}_n = S_n/n$.
2. Vérifier que pour tout $\varepsilon > 0$, la série de terme général $P(|\bar{Y}_{n^2}| > \varepsilon)$ est convergente.
3. En déduire que $\bar{Y}_{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$ (on pourra utiliser les résultats de l'exercice 166).
4. Pour tout $n \geq 1$, montrer l'existence d'un unique entier $k_n \geq 1$ tel que $k_n^2 \leq n < (k_n + 1)^2$.

5. Vérifier que pour tout $n \geq 1$,

$$|\bar{Y}_n| \leq |\bar{Y}_{k_n^2}| + \frac{\max_{j=k_n^2,\dots,(k_n+1)^2-1} |S_j - S_{k_n^2}|}{k_n^2}.$$

6. En déduire qu'il est suffisant de montrer que $\frac{\max_{j=k^2,\dots,(k+1)^2-1} |S_j - S_{k^2}|}{k^2} \xrightarrow[k\to\infty]{p.s.} 0$.
7. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que la série de terme général $P\left(\frac{\max_{j=k^2,\dots,(k+1)^2-1} |S_j - S_{k^2}|}{k^2} > \varepsilon\right)$, $k \geq 1$, est convergente (on pourra commencer par utiliser une borne d'union, puis l'inégalité de Bienaymé-Chebychev).
8. Conclure.

Exercice 182 Encore une loi forte des grands nombres (Kolmogorov-Khintchine)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d intégrables. On souhaite montrer qu'alors, $\bar{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s}} \mathbb{E}[X_1]$.

1. Vérifier que sans perte de généralité, on peut supposer (ce qu'on fera dans la suite) que $\mathbb{E}[X_1] = 0$.
2. Pour tout $n \geq 1$, on pose $Y_n = X_n \mathbb{1}_{|X_n|\leq n}$.
   a) Vérifier qu'avec probabilité 1, $Y_n = X_n$ pour tout n assez grand.
   b) En déduire qu'il est suffisant de montrer que $\bar{Y}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s}} 0$.
3. Montrer que $\mathbb{E}[Y_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
4. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Var}(Y_n)}{n^2} \leq \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} X_1^2 \mathbb{1}_{|X_1|\leq n}\right]$$

   (on prendra soin de tout justifier).
5. Vérifier que pour tout $n \geq 1$, $X_1^2 \mathbb{1}_{|X_1|\leq n} = \sum_{m=1}^{n} X_1^2 \mathbb{1}_{m-1<|X_1|\leq m}$.
6. En déduire que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} X_1^2 \mathbb{1}_{|X_1|\leq n} \leq |X_1| \sum_{m=1}^{\infty} m \mathbb{1}_{m-1<|X_1|\leq m} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

   (encore une fois, on prendra soin de tout justifier).
7. Vérifier que pour tout $m \geq 1$,

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{m}.$$

8. Déduire des questions précédentes que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Var}(Y_n)}{n^2} \leq 2\mathbb{E}[|X_1|].$$
9. Conclure à l'aide de l'exercice précédent.

Exercice 183 La réciproque de la loi de Kolmogorov-Khintchine

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. On suppose que $\bar{X}_n$ converge presque sûrement, vers une variable aléatoire qu'on note Z dans la suite.

1. Vérifier que $\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s}} 0$ *(on remarquera que* $\frac{X_n}{n} = \bar{X}_n - \frac{n-1}{n}\bar{X}_{n-1}$*)*.
2. En déduire que X_1 est intégrable *(cela est démontré dans l'exercice 167)* et que $Z = \mathbb{E}[X_1]$ preque sûrement.

Exercice 184

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. Pour tout $n \geq 1$, on suppose que $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\log(n+1)}$ et $P(X_n = n) = P(X_n = -n) = \frac{1}{2n\log(n+1)}$.

1. Vérifier que les X_n sont intégrables et centrées.
2. Montrer que $\bar{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0$.
3. On va montrer qu'en revanche, $\bar{X}_n$ ne converge pas presque sûrement vers 0.
   a) A l'aide du théorème de Borel-Cantelli, montrer qu'avec probabilité 1, $|X_n| = n$ infiniment souvent.
   b) En déduire que $\frac{X_n}{n}$ ne converge pas presque sûrement vers 0.
   c) Conclure.

Exercice 185

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Calculer la limite, lorsque $n \to \infty$, de
$$\int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n.$$

Exercice 186

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d., de carré intégrable. Pour tout $n \geq 1$, on note $\bar{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ la moyenne empirique de $X_1, \ldots, X_n$, et $V_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$ leur variance empirique.

Etudier la convergence presque sûre de $\bar{X}_n$ et V_n, lorsque $n \to \infty$.

Exercice 187

On considère un pécheur, qui, toute sa vie, va pêcher dans la même rivière, contenant deux espèces de poissons: des carpes et des truites. Chaque jour, le pêcheur reste sur sa barque, à pêcher, jusqu'à ce qu'il attrape une truite. On suppose qu'à chaque prise, il y a autant de chances qu'il s'agisse d'une carpe que d'une truite. On note n le nombre total de jours où le pêcheur s'en est allé pêcher et, pour $i = 1, \ldots, n$, on note X_i le nombre de poissons attrapés par le pêcheur le jour numéro i, c'est-à-dire, le nombre de poissons qu'il lui a fallu attraper avant de pêcher une truite, la truite étant incluse dans le compte.

1. Quelle est la loi de X_1 ?
2. A la fin de sa vie, le pêcheur aura-t-il pêché significativement plus de carpes, ou de truites ?

Exercice 188

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d., de carré intégrable. Etudier la convergence presque sûre de $\dfrac{X_1X_2 + X_2X_3 + \ldots + X_{n-1}X_n}{n}$.

* Exercice 189 Une réciproque à la loi forte des grands nombres

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. Pour tout $n \geq 1$, soit $\bar{X}_n$ la moyenne empirique de $X_1, \ldots, X_n$.

1. A l'aide de l'exercice 170, montrer que $P(\{\omega \in \Omega : \bar{X}_n(\omega) \text{ converge}\}) = 0$ ou 1 et que si $\bar{X}_n$ converge presque sûrement, sa limite est nécessairement une constante.
2. Montrer que $\bar{X}_n$ converge presque sûrement si et seulement si X_1 admet une espérance, qui est alors la limite presque sûre de $\bar{X}_n$ (on pourra montrer que si $\bar{X}_n$ converge presque sûrement, alors X_n/n converge presque sûrement vers 0, et utiliser le résultat de l'exercice 167).

Exercice 190 Régression linéaire

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles, de carré intégrable. On suppose $\mathsf{Var}(X) \neq 0$.

1. Montrer que $a^* = \dfrac{\mathsf{cov}(X,Y)}{\mathsf{Var}(X)}$ et $b^* = \mathbb{E}[Y] - \dfrac{\mathsf{cov}(X,Y)}{\mathsf{Var}(X)}\mathbb{E}[X]$ sont les uniques réels qui minimisent la fonction $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{E}[(Y - aX - b)^2]$.
2. Montrer qu'on peut écrire $Y = a^*X + b^* + \varepsilon$, où ε est une variable aléatoire réelle de carré intégrable, satisfaisant $\mathbb{E}[\varepsilon] = 0$ et $\mathsf{cov}(\varepsilon, X) = 0$.
3. Montrer que, réciproquement, si a et b sont deux nombres réels tels que, en posant $\varepsilon = Y - (aX + b)$, on a $\mathbb{E}[\varepsilon] = 0$ et $\mathsf{cov}(\varepsilon, X) = 0$, alors $a = a^*$ et $b = b^*$.

4. Soit $\big((X_n, Y_n)\big)_{n\geq 1}$ une suite de vecteurs aléatoires i.i.d. de même loi que le vecteur (X, Y). Pour tout entier $n \geq 1$, on définit le couple $(\hat{a}_n, \hat{b}_n)$ comme un minimiseur de la fonction
$$(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - aX_i - b_i)^2.$$
   a) Montrer qu'avec probabilité un, la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ n'est pas constante.
   b) En déduire qu'avec probabilité un, le couple $(\hat{a}_n, \hat{b}_n)$ est unique pour n assez grand, et le calculer.
   c) Montrer que le couple $(\hat{a}_n, \hat{b}_n)$ converge presque sûrement vers (a^*, b^*) lorsque $n \to \infty$.

8 Convergence en loi et théorème de la limite centrale

8.1 Convergence en loi

Exercice 191

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, convergent en distribution vers une variable aléatoire réelle X supposée continue. Montrer les assertions suivantes:

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(X_n > t) \xrightarrow[n\to\infty]{} P(X > t)$.
2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(X_n < t) \xrightarrow[n\to\infty]{} P(X < t)$.
3. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, $P(a < X_n < b) \xrightarrow[n\to\infty]{} P(a < X < b)$.
4. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, $P(a \leq X_n < b) \xrightarrow[n\to\infty]{} P(a \leq X < b)$.
5. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(|X_n| \leq t) \xrightarrow[n\to\infty]{} P(|X| \leq t)$.

Exercice 192

Pour tout $n \geq 1$, soit X_n une variable aléatoire réelle satisfaisant $P(X_n = 0) = 1 - 1/n$ et $P(X_n = n^2) = 1/n$.

1. Montrer que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} 0$.
2. Qu'en est-il de la suite $\mathbb{E}[X_n]$?

Exercice 193

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0, 1]$. Montrer que la suite $(n \min(X_1, \ldots, X_n))_{n\geq 1}$ converge en loi, vers une loi limite qu'on déterminera.

Exercice 194

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout $n \geq 1$, on note $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. Déterminer une suite réelle $(a_n)_{n\geq 1}$ telle que $M_n - a_n$ converge en loi, lorsque $n \to \infty$, vers une distribution qu'on identifiera.

Exercice 195

Soient $X_1, X_2, \dots$ des variables aléatoires réelles i.i.d. de loi de Cauchy.

1. Vérifier que X_1 n'admet pas de moment d'ordre 1.
2. On admet que la fonction caractéristique de X_1 est donnée par $\Phi(t) = e^{-|t|}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   a) Déterminer la loi de $\bar{X}_n$, pour tout $n \geq 1$.
   b) En déduire que $\bar{X}_n$ ne converge pas en probabilité vers une constante.
   c) Soit $(a_n)_{n\to\infty}$ une suite strictement positive satisfaisant $a_n/n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. Montrer que $\dfrac{X_1 + \dots + X_n}{a_n} \xrightarrow{P} 0$.

Exercice 196 Loi des petits nombres

Démontrer la loi des petits nombres : si, pour tout $n \geq 1$ assez grand, X_n suit la loi binomiale de paramètres n et λ/n, où $\lambda > 0$, alors X_n converge en distribution vers la loi de Poisson de paramètre λ.

Exercice 197

Soit $\lambda > 0$. Pour tout entier $n \geq \lambda$, soit $(X_{k,n})_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre λ/n. Pour $n \geq 1$, soit $N_n = \inf\{k \geq 1 : X_{k,n} = 1\}$.

1. Montrer que presque sûrement, pour tout $n \geq \lambda$, $N_n < \infty$.
2. Vérifier que N_n/n converge en distribution, lorsque $n \to \infty$, vers une loi qu'on déterminera.

Exercice 198

Soient $(\mu_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels et $(\sigma_n^2)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels strictement positifs. Soient aussi $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 > 0$. Pour tout $n \geq 1$, soit X_n une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$.

1. Montrer que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si et seulement si $\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu$ et $\sigma_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \sigma^2$.
2. Montrer que X_n converge en distribution vers μ si et seulement si $\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu$ et $\sigma_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
3. Montrer que si $\sigma_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, alors la suite X_n ne converge pas en distribution.

Exercice 199

Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ et $(Y_n)_{n\geq 1}$ deux suites de vecteurs aléatoires réels. On suppose que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} X$ et $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} Y$, où X et Y sont deux vecteurs aléatoires donnés. On suppose de plus que pour tout $n \geq 1$, X_n et Y_n sont indépendants. Déterminer la limite en distribution de la suite de vecteurs aléatoires $((X_n, Y_n))_{n\geq 1}$.

Exercice 200

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de Bernoulli de paramètre $1/2$, et soit $Z = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{2^n}$. On cherche à déterminer la loi de Z.

1. Montrer que la variable aléatoire Z est bien définie de manière non ambiguë sur un événement de probabilité 1.
2. Pour tout $n \geq 1$, on pose $Z_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{2^k}$.
   a) Montrer que Z_n converge presque sûrement vers Z, lorsque $n \to \infty$.
   b) Pour tout $n \geq 1$, déterminer la fonction caractéristique de Z_n, en tout réel $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$.
   c) En déduire la fonction caractéristique de Z, puis la loi de Z.

Exercice 201

Soit X une variable aléatoire réelle.

1. Supposons que X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Pour chaque entier $n \geq 1$, déterminer la loi de $\lfloor nX \rfloor$.
2. Supposons à présent que pour tout entier $n \geq 1$, $\lfloor nX \rfloor$ suit la loi géométrique de paramètre $1 - e^{-\lambda/n}$, pour un certain $\lambda > 0$.
   a) Vérifier que $n^{-1}\lfloor nX \rfloor$ converge presque sûrement vers X.
   b) Pour chaque $n \geq 1$, déterminer la fonction de répartition de $n^{-1}\lfloor nX \rfloor$.
   c) En déduire que X suit la loi exponentielle de paramètre λ.

* Exercice 202

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0, 1]$. Pour tout $n \geq 1$, on note Y_n la médiane empirique de l'échantillon $X_1, X_2, \ldots, X_{2n+1}$ (i.e., une fois ces $2n + 1$ variables rangées dans l'ordre, on prend celle du milieu de la liste).

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, Y_n admet une densité, et la calculer.
2. En utilisant le théorème de Scheffé, montrer que $2\sqrt{2n}\left(Y_n - \frac{1}{2}\right)$ converge en loi, vers une loi limite qu'on déterminera.

Indice: on pourra utiliser la formule de Stirling:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}{n!} = 1.$$

Exercice 203

Soient $d \geq 1$ et $X^{(d)}$ un vecteur aléatoire de taille d, uniformément distribué dans la boule euclidienne centrée en 0 et de rayon $\sqrt{d}$. Montrer que

$$X_1^{(d)} \xrightarrow[d\to\infty]{\text{(d)}} \mathcal{N}(0,1)$$

(cf. exercice 70).

8.2 Théorème de la limite centrale

Dans certains des exercices suivants, on s'intéresse à la construction d'intervalles de confiance, souvent utilisés en statistique. Etant donnée une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant une loi paramétrée par un réel θ, une suite d'intervalles de confiance de niveau asymptotique $\alpha \in (0,1)$ est une suite d'intervalles aléatoires $(I_n)_{n\geq 1}$, dont la construction ne dépend pas de la valeur de θ, tels que pour chaque $n \geq 1$, I_n dépend de $X_1, \ldots, X_n$ et qui satisfont $P(I_n \ni \theta) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1-\alpha$.

Exercice 204

Pour tout $n \geq 1$, soit X_n une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre n.

1. Montrer que $\frac{X_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \mathcal{N}(0,1)$.
2. En déduire que $e^{-n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n^k}{k!} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$.

Exercice 205

Soit P une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ admettant deux moments et telle que, si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires i.i.d. de loi P, alors $\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}$ suit la loi P. On cherche à montrer que nécessairement, P est une loi normale centrée.

1. Vérifier que le premier moment de P est nul.
2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi P.
   a) Vérifier que pour tout $n \geq 1$, $\frac{X_1+\ldots+X_{2^n}}{\sqrt{2^n}}$ suit la loi P.
   b) Conclure.

Exercice 206

Soit X une variable aléatoire réelle. Pour tout $\alpha \in (0,1)$, on appelle *quantile d'ordre α de X (ou de la loi de X)* tout réel q satisfaisant $P(X \leq q) \geq \alpha$ et $P(X \geq q) \geq 1-\alpha$. Supposons ici que X suit la loi normale centrée réduite.

1. Montrer que pour tout $\alpha \in (0,1)$, X admet un unique quantile d'ordre α, donné par l'unique réel q satisfaisant $\Phi(q) = \alpha$, où Φ est la fonction de répartition de X. Dans la suite, on note q_α le quantile d'ordre α de X.
2. Vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$.
3. En déduire que pour tout $t \geq 0$,
$$P(|Z| \leq t) = 2\Phi(t) - 1.$$
4. En déduire que pour tout $\alpha \in (0,1)$, l'unique réel t satisfaisant $P(|Z| \leq t) = 1-\alpha$ est $t = q_{1-\frac{\alpha}{2}}$.
5. A l'aide de la Table se trouvant page 85, déterminer une valeur approchée des quantiles d'ordre 90%, 95% et 97.5% de la loi normale centrée réduite.

Exercice 207

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Pour tout $n \geq 1$, on note $\bar{X}_n$ la moyenne empirique de $X_1, \ldots, X_n$.

1. a) Montrer que pour tout $t \geq 0$,
$$P(|\bar{X}_n - \lambda| \leq t\sqrt{\lambda}/\sqrt{n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} P(|Z| \leq t),$$
où Z est une variable aléatoire réelle de loi normale centrée réduite.
   b) Soit $t \geq 0$. Montrer que l'événement $|\bar{X}_n - \lambda| \leq t\sqrt{\lambda}/\sqrt{n}$ est équivalent à $I_n(t) \ni \lambda$, où $I_n(t)$ est un intervalle dont l'expression ne dépend pas de λ, et qu'on déterminera *Indication : il faudra résoudre une inéquation du second degré en λ).*
   c) En déduire l'expression d'une suite d'intervalles de confiance de niveau asymptotique α.
2. a) Montrer que $\bar{X}_n + 1/n$ converge en probabilité vers une constante.
   b) En déduire que
$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \lambda}{\sqrt{\bar{X}_n + 1/n}} \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \mathcal{N}(0,1)$$
(on utilisera le théorème de Slutsky).
   c) En déduire que pour tout $t \geq 0$,
$$P\left(|\bar{X}_n - \lambda| \leq \frac{t\sqrt{\bar{X}_n + 1/n}}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} P(|Z| \leq t),$$

où Z est à nouveau une variable aléatoire réelle de loi normale centrée réduite *(on utilisera le théorème de Slutsky).*

d) En déduire l'expression d'une suite d'intervalles de confiance de niveau asymptotique α.

3. Pour les deux suites d'intervalles de confiance définies précédemment, indiquer à quelle vitesse leurs longueurs tend presque sûrement vers zéro, lorsque $n \to \infty$.

Exercice 208

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Pour tout $\alpha \in (0, 1)$, trouver un intervalle de confiance de niveau asymptotique α pour λ, i.e., trouver une suite d'intervalles aléatoires $(I_n)_{n\geq 1}$, qui ne dépendent pas de λ, et tels que $P(I_n \ni \lambda) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - \alpha$.
   De même que dans l'exercice précédent, on procèdera de deux manières différentes: sans utiliser le théorème de Slutsky, puis en l'utilisant.

Exercice 209

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.

1. Pour tout $\alpha \in]0, 1[$, trouver un intervalle de confiance de niveau asymptotique α pour p, i.e., trouver une suite d'intervalles aléatoires $(I_n)_{n\geq 1}$, qui ne dépendent pas de p, et tels que $P(I_n \ni p) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - \alpha$.
   A nouveau, on procèdera de deux manières différentes: sans utiliser le théorème de Slutsky, puis en l'utilisant.

Exercice 210 Un modèle multinomial

Soit E un ensemble fini à K éléments, où $K \in \mathbb{N}^*$. On note $a_1, \ldots, a_K$ ses éléments. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans E. Pour tout $n \geq 1$ et $k = 1, \ldots, K$, on note

$$\hat{p}_n^{(k)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{X_i = a_k}$$

et $\hat{p}_n = (\hat{p}_n^{(1)}, \ldots, \hat{p}_n^{(K)})$. On suppose que pour tout $k = 1, \ldots, K$, $P(X_1 = a_k) > 0$.

1. Montrer que $\hat{p}_n$ converge presque sûrement vers un vecteur $p \in \mathbb{R}^K$ que l'on déterminera, lorsque $n \to \infty$.
2. Montrer que $\sqrt{n}(\hat{p}_n - p) \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \mathcal{N}_d(0, \Sigma)$, où Σ est une matrice qu'on déterminera.

3. On note Q la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les racines carrées des coordonnées de p. Vérifier que Σ peut s'écrire comme QPQ, où P est une matrice de projection orthogonale de rang $K-1$.
4. En déduire que $n\sum_{k=1}^{K}\frac{(\hat{p}_n^{(k)}-p^{(k)})^2}{p^{(k)}}$ converge en distribution vers une loi du χ^2, dont on déterminera le nombre de degrés de libertés.

Exercice 211 Intervalles de confiance

Soit $f(x)=\dfrac{C}{\sqrt{\theta-x}}\mathbb{1}_{0<x<\theta}$, pour tout $x\in\mathbb{R}$, où $\theta>0$ est un nombre réel fixé et C est un nombre réel.

1. Déterminer la valeur de C, en fonction de θ, de sorte que f soit une densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

   Dans la suite, on prend cette valeur de C, et on considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires i.i.d. admettant f comme densité par rapport à la mesure de Lebesgue.
2. Calculer la limite presque sûre de $\bar{X}_n$, lorsque $n\to\infty$.
3. Déterminer deux réels a et b, qui ne dépendent pas de θ, tels que $\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n-a\theta}{b\theta}$ converge en distribution vers la loi normale centrée réduite.
4. Soit $\alpha\in(0,1)$. Déduire de la question précédente une suite d'intervalles de confiance de niveau asymptotique α pour θ, i.e., une suite d'intervalles $(I_n)_{n\geq 1}$ telle que pour tout $n\geq 1$, I_n ne dépend que de $X_1,\dots,X_n$ et ne dépend pas de θ, et satisfaisant $P(I_n\ni\theta)\xrightarrow[n\to\infty]{}1-\alpha$ (pour tout $\beta\in(0,1)$, on notera q_β le quantile d'ordre β de la loi normale centrée réduite).
5. Pour tout $n\geq 1$, on pose $M_n=\max(X_1,\dots,X_n)$.
   a) Vérifier que $M_n\leq\theta$ presque sûrement.
   b) Déterminer la fonction de répartition de $n^2\dfrac{\theta-M_n}{\theta}$ (*on rappelle qu'une fonction de répartition est définie sur* $\mathbb{R}$ *tout entier).*
6. En déduire que $n^2\dfrac{\theta-M_n}{\theta}$ converge en distribution, vers une loi dont on donnera la fonction de répartition.
7. Soit $\alpha\in(0,1)$. Déduire de la question précédente une suite d'intervalles de confiance de niveau asymptotique α pour θ.
8. Comparer la précision de cet intervalle de confiance avec celui obtenu à l'aide du théorème de la limite centrale, à la question 4. Commenter.
9. Soit $n\geq 1$. A l'aide du calcul de la fonction de répartition de $n^2\dfrac{\theta-M_n}{\theta}$, proposer un intervalle de confiance de niveau **non-asymptotique** α pour θ, i.e., un

intervalle I_n ne dépendant que de $X_1, \ldots, X_n$, et non de θ, et satisfaisant l'égalité

$$P(I_n \ni \theta) = 1 - \alpha.$$

9 Vecteurs gaussiens

9.1 Rappels d'algèbre linéaire

Dans les exercices de cette partie, $d \geq 1$ est un entier.

Exercice 212 Rappels sur les matrices symétriques

1. Soit $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ une matrice symétrique. Montrer qu'elle est diagonalisable avec matrice de passage pouvant être choisie orthogonale, i.e., qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que $A = PDP^\top$.
2. Soit $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ une matrice symétrique. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) A est une matrice de projection (i.e., $A^2 = A$)
   (ii) Toutes les valeurs propres de A valent 0 ou 1.
3. Soit $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$. Montrer que A est la matrice d'une projection orthogonale si et seulement si A est symétrique et $A^2 = A$. On rappelle qu'une projection orthogonale est une application linéaire $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ satisfaisant $u \circ u = u$ et dont le noyau et l'image sont orthogonaux.
4. Soit $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ une matrice symétrique. Montrer que A est semi-définie positive (i.e., $x^\top Ax \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$) si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles.
5. Soit $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ une matrice symétrique. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) A est définie positive (i.e., $x^\top Ax > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$)
   (ii) A est semi-définie positive et inversible
   (iii) Toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.

Exercice 213 Matrices de projection

On rappelle qu'une matrice $P \in \mathbb{R}^{d\times d}$ est une matrice de projection si et seulement si $P^2 = P$. Si de plus, l'image et le noyau de P sont orthogonaux, on dit que P est une matrice de projection orthogonale.

1. Soit $P \in \mathbb{R}^{d\times d}$.

a) Montrer que P est une matrice de projection si et seulement si $I_d - P$ est une matrice de projection.
   b) Dans ce cas, montrer que $\ker(P) = \mathrm{Im}(I_d - P)$ et $\ker(I_d - P) = \mathrm{Im}(P)$.
   c) En particulier, vérifier que $\mathrm{rang}(I_d - P) = d - \mathrm{rang}(P)$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}^{d\times d}$.
   a) Montrer que P est une matrice de projection orthogonale si et seulement si $I_d - P$ est une matrice de projection orthogonale.
3. Vérifier que si P est une matrice de projection, alors $\mathrm{Tr}(P) = \mathrm{rang}(P)$.
4. Montrer qu'une matrice $P \in \mathbb{R}^{d\times d}$ est une matrice de projection orthogonale si et seulement si $P^2 = P = P^\top$.
5. Montrer qu'une matrice de projection orthogonale est toujours une matrice symétrique semi-définie positive.
6. Montrer que la seule matrice de projection orthogonale définie positive est la matrice identité.
7. Soit $u \in \mathbb{R}^d$.
   a) Montrer que $uu^\top$ est une matrice de projection orthogonale si et seulement si $u = 0$ ou $\|u\| = 1$.
   b) Dans ce cas, déterminer le noyau et l'image de cette matrice de projection orthogonale, ainsi que le noyau et l'image de la matrice de projection orthogonale $I_d - uu^\top$.

Exercice 214 Une caractérisation des matrices carrées de rang 1

1. Soit $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$.
   a) Montrer que A est de rang 1 si et seulement s'il existe $u, v \in \mathbb{R}^d$ non nuls tels que $A = uv^\top$.
   b) Vérifier que, dans ce cas, $\mathrm{Tr}(A) = u^\top v$.
2. Soit $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ une matrice symétrique.
   a) Montrer que A est de rang 1 si et seulement s'il existe $u \in \mathbb{R}^d$ non nul tel que $A = uu^\top$ ou $A = -uu^\top$.
   b) Montrer que si de plus, A est semi-définie positive, alors A est de rang 1 si et seulement s'il existe $u \in \mathbb{R}^d$ non nul tel que $A = uu^\top$.
   c) Dans le cas de la question précédente, vérifier que A est une matrice de projection orthogonale si et seulement si $\|u\|_2 = 1$.

Exercice 215 Racines d'une matrice

Soit $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ une matrice symétrique semi-définie positive.

1. Montrer l'existence d'une matrice $M \in \mathbb{R}^{d\times d}$ satisfaisant $MM^\top = A$. Cette matrice est-elle unique ?

2. Soit r le rang de A. Montrer l'existence d'une matrice $M \in \mathbb{R}^{d\times r}$ satisfaisant $MM^\top = A$.
3. Montrer l'existence et l'unicité d'une matrice $M \in \mathbb{R}^{d\times d}$ symétrique et semi-définie positive telle que $A = M^2$. On note $A^{1/2}$ cette matrice.
4. Supposons dans cette question que A est définie positive.
   a) Vérifier que $A^{1/2}$ est définie positive.
   b) Montrer que $(A^{1/2})^{-1} = (A^{-1})^{1/2}$ (qu'on note alors, sans ambiguïté, $A^{-1/2}$).

Exercice 216

Soit $\Sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$ une matrice symétrique semi-définie positive.

1. Montrer l'existence d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ et d'un entier $r \in \{1, \dots, d\}$ tel que $A\Sigma A^\top = I_{r,d}$, où $I_{r,d} \in \mathbb{R}^{d\times d}$ est la matrice diagonale dont les r premiers coefficients diagonaux valent 1 et tous les autres sont nuls.
2. Montrer l'existence d'une matrice $B \in \mathbb{R}^{r\times d}$ telle que $B\Sigma B^\top = I_r$, la matrice identité de taille r.
3. Vérifier que r est le rang de Σ.
4. Vérifier que si Σ est inversible, alors $r = d$ et on peut prendre $A = \Sigma^{-1/2}$.

Exercice 217 Rang d'une matrice

Dans cet exercice, $p, q, r \geq 1$ sont des entiers fixés.

1. Montrer que pour toute $A \in \mathbb{R}^{p\times q}$, $\operatorname{rang}(A^\top) = \operatorname{rang}(A)$.
2. Montrer que pour toute $A \in \mathbb{R}^{p\times q}$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\operatorname{rang}(\lambda A) = \operatorname{rang}(A)$.
3. Montrer que pour toutes matrices $A, B \in \mathbb{R}^{p\times q}$, $\operatorname{rang}(A+B) \leq \operatorname{rang}(A)+\operatorname{rang}(B)$.
4. Soient $A \in \mathbb{R}^{p\times q}$ et $B \in \mathbb{R}^{q\times r}$. Montrer que $\operatorname{rang}(AB) \leq \min(\operatorname{rang}(A), \operatorname{rang}(B))$.

Exercice 218

Soit $M \in \mathbb{R}^{p\times q}$, où $p, q \geq 1$.

1. Vérifier que $\operatorname{rang}(M) \leq \min(p, q)$.
2. Vérifier que $MM^\top$ est inversible si et seulement si $\operatorname{rang}(M) = p$ (ce qui requiert nécessairement que $p \leq q$).
3. Vérifier que $M^\top M$ est inversible si et seulement si $\operatorname{rang}(M) = q$ (ce qui requiert nécessairement que $q \leq p$).

9.2 Vecteurs gaussiens

Dans cette partie, $d \geq 1$ est un entier et on note $\mathcal{S}_d$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille d, $\mathcal{S}_d^+$ l'ensemble de celles qui sont semi-définies positives et $\mathcal{S}_d^{++}$ l'ensemble de celles qui sont définies positives.

Exercice 219

Soient X_1, X_2, X_3 des variables aléatoires réelles i.i.d. de loi normale centrée réduite. Déterminer la loi du vecteur aléatoire $(X_1, X_1 + X_2, X_1 + X_2 + X_3)$. Ce vecteur admet-il une densité par rapport à la mesure de Lebesgue ?

Exercice 220

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires gaussiennes indépendantes ($n \in \mathbb{N}^*$). Pour $i = 1, \ldots, n$, on note μ_i la moyenne de X_i et σ_i^2 sa variance. Pour tous réels $a_1, \ldots, a_n, b$, déterminer la loi de $a_1 X_1 + \ldots + a_n X_n + b$.

Exercice 221

1. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des vecteurs aléatoires réels indépendants de taille $d \geq 1$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que les X_i sont de carré intégrable, et on note $\mu_1, \ldots, \mu_n$ leurs espérances respectives ainsi que $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ leurs matrices de variance-covariance respectives. Pour toutes matrices $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}^{p \times d}$ et tout vecteur $b \in \mathbb{R}^p$, où $p \geq 1$, déterminer l'espérance et la matrice de variance-covariance de $A_1 X_1 + \ldots + A_n X_n + b$.
2. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des vecteurs aléatoires gaussiens indépendants de taille $d \geq 1$. Pour $i = 1, \ldots, n$, on note μ_i l'espérance de X_i et Σ_i sa matrice de variance-covariance.
   a) Vérifier que le vecteur $(X_1, \ldots, X_n)$, de taille nd, est un vecteur gaussien.
   b) A l'aide de la question 1, en déduire la loi de $A_1 X_1 + \ldots + A_n X_n + b$, pour toutes matrices $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}^{p \times d}$ et tout vecteur $b \in \mathbb{R}^p$, où $p \geq 1$.
3. Retrouver le résultat de la question précédente à l'aide des fonctions caractéristiques.

Exercice 222 Produit des composantes d'un vecteur gaussien

Soit X un vecteur gaussien centré de taille $d \geq 1$, dont on note les coordonnées $X_1, \ldots, X_d$. Le but de l'exercice est de trouver une formule pour $\mathbb{E}[X_1 X_2 \ldots X_d]$.

1. Vérifier que si d est impair, $\mathbb{E}[X_1 X_2 \ldots X_d] = 0$.
2. Dans cette question, on suppose que d est pair, et on note $p = d/2$. Soit $F(v) = \mathbb{E}[e^{v^\top X}]$, pour tout $v \in \mathbb{R}^d$.
   a) Vérifier que pour tout $v \in \mathbb{R}^d$, $F(v)$ est bien défini qu'on a l'identité $F(v) = e^{(1/2) v^\top \Sigma v}$, où Σ est la matrice de variance-covariance de X.
   b) Montrer que la fonction F ainsi définie est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$ et qu'on a l'égalité
   $$\mathbb{E}[X_1 \ldots X_d] = \frac{\partial^d F}{\partial v_1 \ldots \partial v_d}(0).$$

c) On appelle un appariement de $\{1, \ldots, 2p\}$ tout ensemble de la forme $\{(i_1, i_2), (i_3, i_4), \ldots, (i_{2p-1}, i_{2p}$ où $i_1, i_2, \ldots, i_{2p}$ sont deux à deux distincts et $i_1 < i_2, i_3 < i_4, \ldots, i_{2p-1} < i_{2p}$. On note $\mathcal{A}_p$ l'ensemble des appariements de $\{1, \ldots, 2p\}$ (on rappelle que $d = 2p$). Montrer, à l'aide des questions précédentes, que

$$\mathbb{E}[X_1 \ldots X_{2p}] = \sum_{A \in \mathcal{A}_p} \prod_{(i,j) \in A} \operatorname{cov}(X_i, X_j)$$

(indication : on pourra écrire $F(v) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(v^\top \Sigma v)^k}{k!}$ *pour tout* $v \in \mathbb{R}^d$*, et montrer que seul le terme correspondant à* $k = p$ *contribue à la d-ème dérivée partielle en* 0 *de* F *par rapport à* $v_1, \ldots, v_d$*).*

Exercice 223 Calcul de la fonction caractéristique d'un vecteur gaussien

Soit $X \sim \mathcal{N}_d(\mu, \Sigma)$, où $d \geq 1$, $\mu \in \mathbb{R}^d$ et $\Sigma \in \mathcal{S}_d^+$.

1. Vérifier que pour tout $v \in \mathbb{R}^d$, $\mathbb{E}[e^{iv^\top X}] = e^{iv^\top \mu} \mathbb{E}[e^{iv^\top Y}]$ où $Y \sim \mathcal{N}_d(0, \Sigma)$.
2. Soit $v \in \mathbb{R}^d$. A l'aide de l'exercice précédent, vérifier que pour tout entier $k \geq 1$,

$$\mathbb{E}[(v^\top Y)^k] = \begin{cases} 0 \text{ si } k \text{ est impair} \\ \frac{(2p)!}{2^p p!} (v^\top \Sigma v)^p \text{ si } k \text{ est pair, avec } p = k/2. \end{cases}$$

3. En déduire que pour tout $v \in \mathbb{R}^d$, $\mathbb{E}[e^{iv^\top X}] = e^{iv^\top \mu - \frac{v^\top \Sigma v}{2}}$.

Exercice 224 Des variables aléatoires gaussiennes de covariance nulle, mais non indépendantes (1)

Soit X une variable aléatoire réelle gaussienne, centrée réduite et $c > 0$. On définit la variable aléatoire

$$X_c = \begin{cases} X \text{ si } |X| \leq c \\ -X \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de X_c.
2. Montrer que le vecteur (X, X_c) n'est pas un vecteur gaussien.
3. Montrer que X et X_c ne sont pas indépendantes.
4. Montrer que pourtant, il existe une valeur de c telle que $\mathsf{cov}(X, X_c) = 0$.

Exercice 225 Des variables aléatoires gaussiennes de covariance nulle, mais non indépendantes (2)

Soit X une variable aléatoire réelle de loi normale centrée réduite et ε une variable aléatoire indépendante de X satisfaisant $P(\varepsilon = 1) = P(\varepsilon = -1) = 1/2$. On pose $Y = \varepsilon X$.

1. Vérifier que $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$.
2. Vérifier que $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$.
3. Vérifier que X et Y ne sont pas indépendantes.
4. En déduire que le vecteur (X,Y) n'est pas un vecteur gaussien, et retrouver ce résultat à l'aide d'un second raisonnement.

Exercice 226

Soit (X_1, X_2, X_3) un vecteur aléatoire réel de taille 3, continu, et de densité donnée par

$$f(x_1,x_2,x_3) = C \exp\left(-\frac{1}{2}(3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3)\right), \quad \forall (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3,$$

où C est un nombre positif.

1. Déterminer la loi de (X_1, X_2, X_3).
2. Chercher deux nombres réels a et b tels que aX_1+bX_2 soit indépendant de (X_1, X_3).

Exercice 227

Soient X_1, X_2, X_3 trois variables aléatoires réelles i.i.d. normales centrées réduites. On pose $S = X_1 + X_2 + X_3$ et $V = (X_1 - X_2)^2 + (X_1 - X_3)^2 + (X_2 - X_3)^2$.

1. Déterminer la loi de S.
2. Montrer que S et V sont indépendantes.
3. Chercher un nombre strictement positif C tel que CV suit une loi du χ_2, dont on précisera le nombre de degrés de liberté.

Exercice 228

Soit (X,Y) un couple aléatoire continu de densité donnée par

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi}(\mathbb{1}_{x,y>0} + \mathbb{1}_{x,y<0})e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Démontrer que X et Y sont toutes les deux Gaussiennes centrées réduites.
2. Montrer en revanche que (X,Y) ne suit pas une loi normale.
3. Calculer la covariance entre X et Y.
4. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 229

Soit $X \sim \mathcal{N}_d(\mu, \Sigma)$, où $\mu \in \mathbb{R}^d$ et $\Sigma \in \mathcal{S}_d^+$.

1. Montrer l'existence d'un entier $r \geq 1$ et d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{r\times d}$ tels que $A(X - \mu) \sim \mathcal{N}_r(0, I_r)$.
2. En déduire que $(X-\mu)^\top A^\top A(X-\mu) \sim \chi^2_r$.

Exercice 230

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de vecteurs aléatoires réels iid de carrés intégrables. Montrer l'existence d'un entier $r \geq 1$, d'une matrice $M \in \mathbb{R}^{r\times d}$ et d'un vecteur $b \in \mathbb{R}^d$ tels que

$$n(\bar{X}_n - b)^\top M(\bar{X}_n - b) \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \chi^2_r.$$

Exercice 231

Soit $X \sim \mathcal{N}_d(\mu, I_d)$, où $\mu \in \mathbb{R}^d$. Soit $P \in \mathbb{R}^{d\times d}$ une matrice de projection orthogonale. Montrer que PX et $(I_d - P)X$ sont indépendants.

Exercice 232 Régression linéaire

Soient $x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs fixés de taille d ($n \geq 1$). Pour $i = 1, \ldots, n$, soit $Y_i = x_i^\top\beta + \varepsilon_i$, où $\beta \in \mathbb{R}^d$ et $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ sont des variables aléatoires iid de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, avec $\sigma^2 > 0$. Dans cet exercice, on suppose que $Y_1, \ldots, Y_n$ sont des données observées, et que les vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ sont connus. En revanche, les variables $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ ne sont pas observées (on les appelle *variables de bruit*). Enfin, le vecteur β est inconnu, et on cherche à l'estimer à l'aide des observations.

1. On pose Y le vecteur aléatoire de taille n dont les coordonnées sont $Y_1, \ldots, Y_n$. Montrer qu'on peut écrire $Y = A\beta + \varepsilon$, où $A \in \mathbb{R}^{n\times d}$ est une matrice à déterminer et ε est un vecteur gaussien dont on précisera la loi.
2. Soit $\hat{\beta}$ un minimiseur de $t \in \mathbb{R}^d \mapsto \sum_{i=1}^n (Y_i - x_i^\top t)^2 = \|Y - At\|^2$ *(on appelle $\hat{\beta}$ un estimateur des moindres carrés ordinaires de β).*
   a) Vérifier que la fonction $g : t \in \mathbb{R}^d \mapsto \|Y - At\|^2$ est convexe.
   b) Montrer que g admet bien au moins un minimiseur.
   c) Vérifier que $A\hat{\beta}$ est la projection orthogonale de Y sur l'espace engendré par les colonnes de Y.
   d) Montrer que si A est de rang d, alors $\hat{\beta}$ est unique et on a
   $$\hat{\beta} = (A^\top A)^{-1}A^\top Y.$$
3. Dans cette question, on suppose que A est de rang d.
   a) Montrer que nécessairement, $n \geq d$ (autrement dit, on a plus d'observations que de coefficients à estimer dans le vecteur inconnu β).

b) Déterminer la loi de $\hat{\beta}$ et vérifier que $\hat{\beta}$ est un estimateur non biaisé de β, i.e., $\mathbb{E}[\hat{\beta}] = \beta$.
c) Exprimer $\mathbb{E}[\|\hat{\beta} - \beta\|^2]$ en fonction de σ^2 et A.
d) Montrer que les vecteurs aléatoires $\hat{\beta}$ et $Y - A\hat{\beta}$ sont indépendants.
e) Supposons que $n > d$. Montrer que $\frac{1}{n-d}\|Y - A\hat{\beta}\|^2$ est un estimateur sans biais de σ^2, i.e., $\mathbb{E}[\frac{1}{n-d}\|Y - A\hat{\beta}\|^2] = \sigma^2$.
f) Montrer que $\frac{1}{\sigma^2}\|Y - A\hat{\beta}\|^2 \sim \chi^2_{n-d}$.

Exercice 233

Vérifier que si $X \sim \mathcal{N}_d(0, I_d)$, alors $UX \sim \mathcal{N}_d(0, I_d)$ quelle que soit la matrice orthogonale $U \in \mathbb{R}^{d\times d}$.

Exercice 234

Soit X un vecteur gaussien centré réduit de dimension $d \geq 1$, et $P \in \mathbb{R}^{d\times d}$ une matrice de projection orthogonale. Montrer que $\|PX\|_2^2$ est une variable de loi du chi-2, dont on déterminera le nombre de degrés de liberté.

Exercice 235

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles, telles que le vecteur (X, Y) soit un vecteur gaussien.

1. Montrer l'existence d'un réel a tel que $X - aY$ et Y soient indépendantes.
2. En déduire $\mathbb{E}[X|Y]$.

Exercice 236

Soient X et Y deux vecteurs aléatoires réels de tailles respectives p et q, tels que le vecteur (X, Y) soit un vecteur gaussien.

1. Montrer l'existence d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{p\times q}$ telle que les vecteurs $X - AY$ et Y soient indépendants.
2. En déduire $\mathbb{E}[X|Y]$.

Exercice 237

1. Soit $X = (X_1, X_2)$ un vecteur gaussien de taille 2.
   a) Trouver un réel a tel que $X_2 + aX_1$ est indépendante de X_1 *On écrira a à l'aide des paramètres de la loi de X).*
   b) En déduire l'espérance conditionnelle de X_2 sachant X_1.
   c) En déduire aussi la loi conditionnelle de X_2 sachant $X_1 = x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Plus généralement, soit X un vecteur gaussien de taille $d \geq 2$. On note X_1 le vecteur formé des k premières coordonnées de X, et X_2 le vecteurs formé des

$d-k$ suivantes, où k est un entier tel que $1 \leq k \leq d-1$. Soit Σ la matrice de variance-covariance de X. On décompose Σ par blocs:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

où $A \in \mathbb{R}^{k\times k}$, $B \in \mathbb{R}^{k\times(d-k)}$, $C \in \mathbb{R}^{(d-k)\times k}$ et $D \in \mathbb{R}^{(d-k)\times(d-k)}$.

a) Vérifier que A est la matrice de variance-covariance de X_1, D celle de X_2, et que $B = C^\top$.

b) Vérifier que X_1 et X_2 sont indépendants si et seulement si $B = 0$.

c) On suppose dans cette question que A est inversible. Trouver alors une matrice $M \in \mathbb{R}^{(d-k)\times k}$ telle que $X_2 - MX_1$ et X_1 sont indépendantes, et en déduire l'espérance conditionnelle de X_2 sachant X_1, puis la loi conditionnelle de X_2 sachant $X_1 = x$, pour tout $x \in \mathbb{R}^k$.

d) *(Question algébriquement difficile à essayer de résoudre après l'examen)* Calculer l'espérance conditionnelle de X_2 sachant X_1 dans le cas général où A n'est pas nécessairement inversible.

Exercice 238

Soit $X = (X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur gaussien de taille $d \geq 1$.

1. Montrer que X_1 est indépendante du vecteur $(X_2, \ldots, X_d)$ si et seulement si X_1 est indépendante de chacun des X_i, $i = 2, \ldots, d$.
2. Montrer que $X_1, \ldots, X_d$ sont mutuellement indépendantes si et seulement si elles sont indépendantes deux à deux.

Exercice 239

Soit (X, Y, Z) un vecteur gaussien centré. On suppose que Y et Z sont indépendantes. Montrer que $\mathbb{E}[X|(Y, Z)] = \mathbb{E}[X|Y] + \mathbb{E}[X|Z]$ p.s. *(on distinguera les cas où $\mathsf{Var}(Y) = 0$ et/ou $\mathsf{Var}(Z) = 0$)*. Rectifier cette égalité lorsque (X, Y, Z) n'est pas centré.

* Exercice 240 Cas particulier de la Méthode Delta

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de vecteurs aléatoires réels dans $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) i.i.d. de carré intégrable et $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$ une fonction de classe C^1, où $p \geq 1$. On pose μ le moment d'ordre 1 de X_1, et Σ sa matrice de variance-covariance.

1. Rappeler la loi limite de $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)$, lorsque $n \to \infty$.
2. On cherche à montrer que $\sqrt{n}(g(\bar{X}_n) - g(\mu))$ converge en distribution, lorsque $n \to \infty$.

   a) Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$\sqrt{n}(g(\bar{X}_n) - g(\mu)) = A_n\left(\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)\right),$$

où A_n est la matrice aléatoire

$$A_n = \int_0^1 Jg(t\bar{X}_n + (1-t)\mu)\,\mathrm{d}t.$$

(pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $Jg(x) \in \mathbb{R}^{p\times d}$ est la matrice Jacobienne de g calculée au point x).

b) Montrer que A_n converge en probabilité vers $Jg(\mu)$.

c) Conclure.

Exercice 241 Une formule d'intégration par parties, cas univarié

Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que f et sa dérivée sont à croissance au plus exponentielle, i.e., il existe deux constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que $\max(|f(x)|, |f'(x)|) \le c_1 e^{c_2|x|}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer, en justifiant toutes les étapes avec soin, que $\mathbb{E}[Xf(X)] = \mathbb{E}[f'(X)]$.

Exercice 242 Une formule d'intégration par parties, cas multivarié

Soit X un vecteur gaussien centré de taille $d \ge 1$, et de matrice de variance-covariance $\Sigma \in \mathcal{S}_d^+$. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On suppose que f et ses dérivées partielles sont à croissance au plus exponentielle, i.e., il existe deux constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que $\max(|f(x)|, |\partial_1 f(x)|, \ldots, |\partial_d f(x)|) \le c_1 e^{c_2|x|}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ici, on note $\partial_j f$ la dérivée partielle de f par rapport à la j-ème coordonnée, pour $j = 1, \ldots, d$.

1. Montrer, en justifiant toutes les étapes avec soin, que pour tout $k = 1, \ldots, d$,

$$\mathbb{E}[X_k f(X)] = \sum_{j=1}^d \Sigma_{j,k}\mathbb{E}[\partial_j f(X)].$$

2. A l'aide de la question précédente, retrouver l'expression de $\mathbb{E}[X_1 \ldots X_d]$ démontrée dans l'exercice 222.

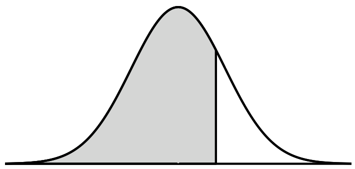

Table 1: Table des valeurs de $P(Z \leq t)$ où $Z \sim N(0,1)$, pour des valeurs positives de t.

	Deuxième décimale de t									
t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

*Pour $t \geq 3.50$, la valeur est plus grande que 0.9998.