1A - 2023-2024

Théorie des Probabilités - Examen de mi-parcours

1. Le sujet compte un nombre total de 24 points. Votre note finale sera simplement tronquée à 20.
2. L'accent sera mis sur la rigueur et la précision de vos réponses. Les réponses non justifiées très soigneusement ne seront pas prises en compte.
3. Bon courage !

Exercice 1 Quizz (14 points)

1. Les assertions suivantes sont-elles vraies ? Le cas échéant, justifiez-le (même si le résultat a déjà été vu en cours ou en TD). Sinon, proposez un argument précis et complet ou un contre-exemple invalidant l'assertion.
   a) (1pt) Soit X une variable aléatoire réelle. Si X^{2024} admet une espérance, alors X admet une espérance.
   b) (1pt) Soit X une variable aléatoire réelle strictement positive presque sûrement. Si X admet une espérance, alors $\log(X)$ admet une espérance.
   c) (1pt) Soit X une variable aléatoire réelle admettant une densité par rapport à la mesure de Lebesgue et Z une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, indépendante de X. Alors $X + Z$ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue.
   d) (1pt) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de carré intégrable. Alors $\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]$ et $\mathbb{E}[Y|\mathcal{B}]$ sont des variables aléatoires indépendantes.
   e) (1pt) Soit X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite. Alors la variable aléatoire $Y = \min(X, 2024)$ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue.
2. (2pt) Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et Y une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $1/2$, indépendante de X. Déterminer la loi de $X - Y$.
3. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles i.i.d. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

a) (2pt) Montrer que $X/(X+Y)$ et $X+Y$ admettent une densité jointe.
b) (1pt) En déduire que ces deux variables sont indépendantes.
c) (1pt) Déterminer la loi de $X/(X+Y)$.

4. Soit $n \geq 1$ un entier naturel. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles iid et $M_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$. On note F la fonction de répartition de X_1 et F_n celle de M_n.
   a) (1pt) Montrer que $1 - F_n = (1-F)^n$.
   b) (1pt) En déduire que le minimum d'un nombre fini de variables aléatoires indépendantes de lois exponentielles suit une loi exponentielle.
5. (1pt) Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes, de lois de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et exponentielle de paramètre 1, respectivement. Calculer, en justifiant chaque étape, $\mathbb{E}[e^{-XY}]$.

Exercice 2 (5 points)

Soient X, Y, Z des variables aléatoires iid de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose M la médiane de X, Y et Z, i.e., la seconde valeur dans la liste réordonnée de X, Y et Z (par exemple, si $X = 0.23, Y = 0.87$ et $Z = 0.12$, alors $M = 0.23$).

1. On cherche à déterminer la fonction de répartition de M. Soit $t \in \mathbb{R}$.
   a) (1pt) Vérifier que si $t < 0$, $P(M \leq t) = 0$ et si $t \geq 1$, $P(M \leq t) = 1$.
   b) (1pt) Supposons que $0 \leq t < 1$. Montrer qu'alors $P(M \leq t)$ peut s'écrire comme $P(N \geq 2)$ où N est une variable aléatoire de loi binomiale de paramètre $(3, t)$ *(on rappelle que si U_1, U_2, U_3 sont des variables aléatoires iid de loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$, alors $U_1 + U_2 + U_3$ suit la loi binomiale de paramètre $(3, p)$, dont la fonction de masse est donnée par $f(k) = \binom{3}{k} t^k (1-t)^{3-k}, k = 0, 1, 2, 3$).*
2. (2pt) En déduire $\mathbb{E}[M]$.
3. (1pt) Expliquer comment on aurait pu obtenir la valeur de $\mathbb{E}[M]$ sans faire aucun calcul.

Exercice 3 (5 points)

Soit X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite et ε une variable aléatoire indépendante de X satisfaisant $P(\varepsilon = 1) = P(\varepsilon = -1) = 1/2$ *(on rappelle que la loi normale centrée réduite est la loi absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, de densité donnée par $f(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}, x \in \mathbb{R}$).*

1. (2pt) Montrer que εX suit la loi normale centrée réduite.
2. (1pt) Montrer que $\mathsf{cov}(X, \varepsilon X) = 0$.
3. (2pt) X et εX sont-elles indépendantes ?