

-
1. Le sujet compte un nombre total de 25 points. Votre note finale sera simplement tronquée à 20.
 2. L'accent sera mis sur la rigueur et la précision de vos réponses. Les réponses non justifiées très soigneusement ne seront pas prises en compte.
 3. Toutes les questions doivent être présentées dans l'ordre sur votre copie.
 4. Une feuille de notes manuscrites recto-verso est autorisée pendant l'examen.
 5. Les appareils électroniques sont interdits.
 6. Bon courage !
-

Exercice 1 Quiz (12 points)

1. Les assertions suivantes sont-elles vraies ? Le cas échéant, justifiez-le (même si le résultat a déjà été vu en cours ou en TD). Sinon, proposez un argument ou un contre-exemple précis et complet invalidant l'assertion.
 - a) (1pt) Soit X une variable aléatoire réelle. Si X^{2026} est intégrable, alors X l'est aussi.
 - b) (1pt) Soit X une variable aléatoire réelle admettant une densité par rapport à la mesure de Lebesgue et Z une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, indépendante de X . Alors $X + Z$ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue.
 - c) (1pt) Soit X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite. Alors la variable aléatoire $Y = \max(X, 2026)$ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue.
2. (2pt) Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et Y une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $1/2$, indépendante de X . Déterminer la loi de $X - Y$.
3. Soit X une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur $[0, 1]$.
 - a) (1pt) Comment définit-on la variable aléatoire qu'on note $\log(1/X)$?
 - b) (2pt) Déterminer la loi de $\log(1/X)$.

4. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles i.i.d. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
 - a) (2pt) Montrer que $X/(X + Y)$ et $X + Y$ admettent une densité jointe qu'on déterminera.
 - b) (1pt) En déduire que ces deux variables sont indépendantes.
 - c) (1pt) Déterminer la loi de $X/(X + Y)$.

Exercice 2 Utilisation de la fonction caractéristique (8 points)

1. Soient $n \geq 1$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$. Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes suivant les lois de Poisson de paramètres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ respectivement.
 - a) (1pt) Déterminer la fonction caractéristique de X_k , pour tout $k = 1, \dots, n$.
 - b) (1pt) En déduire la fonction caractéristique de $X_1 + \dots + X_n$.
 - c) (1pt) En déduire la loi de $X_1 + \dots + X_n$.
2. Soit $n \geq 1$ un entier et $p \in [0, 1]$. Soit X une variable aléatoire réelle de loi binomiale de paramètre (n, p) .¹
 - a) (1pt) Déterminer la fonction caractéristique de X .
 - b) (2pt) En déduire que X a la même loi que la somme de n variables aléatoires réelles i.i.d de loi de Bernoulli de paramètre p .
3. (2pt) Soit $\lambda > 0$. Pour tout entier $n \geq 1$, on définit $p_n = \min(1, \lambda/n)$ et on considère une variable aléatoire X_n de loi binomiale de paramètre (n, p_n) . Montrer que la fonction caractéristique de X_n converge simplement vers la fonction caractéristique d'une variable aléatoire dont on déterminera la loi (on pourra s'aider des formules obtenues dans les questions précédentes).

Exercice 3 (5 points)

Soit X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite et ε une variable aléatoire indépendante de X satisfaisant $P(\varepsilon = 1) = P(\varepsilon = -1) = 1/2$ (on rappelle que la loi normale centrée réduite est la loi absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, de densité donnée par $f(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$, $x \in \mathbb{R}$).

1. (2pt) Montrer que εX suit la loi normale centrée réduite.
2. (1pt) Montrer que $\text{cov}(X, \varepsilon X) = 0$.
3. (2pt) X et εX sont-elles indépendantes ?

¹On rappelle que pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout réel $p \in [0, 1]$, une variable aléatoire réelle X suit la loi binomiale de paramètre (n, p) si et seulement si pour tout entier $k = 0, \dots, n$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.